Math. P. 40
239m

Math. p.
239m

Moth (Franz Xav.)

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36603882720014
<36603882720014
Bayer. Staatsbibliothek

R

Die

Lagrange'schen Relationen,

und

ihre Anwendung zur Ableitung

aller Gleichungen

der

sphärischen Trigonometrie;

dargestellt

von

Franz Xav. Moth.

PRAG.

v. Schönfeld's Papier und Druck.

1829.

16.D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

SEINER EXCELLENZ

dem

Hoch- und Wohlgebornen

Herrn Herrn

Andreas Joseph Freiherrn von Stifft,

Commandeur des k. ungarischen St. Stephan-Ordens, (S. C. E. K.), Großband des k. französischen St. Michael-Ordens, Commandeur des k. sicilianischen St. Ferdinand- und Verdienst-, des k. portugiesischen Christus-, des k. sächsischen Civil-Verdienst-, dann des k. baierischen Verdienst-Ordens, Ritter des k. preußischen rothen Adler-Ordens zweiter Classe, Indigena des Königreichs Ungarn, Landstand von Nieder-Oesterreich, Tirol und Steiermark, k. k. wirklichem geheimen Rath, dann Staats- und Conferenz-Rath, Doctor der Arzneikunde, erstem Leib- und Protomedicus, in den Jahren 1805 und 1821 Rector Magnificus, k. k. Director der medicinischen Studien und Präses der medicinischen Facultät, Mitgliede der medicinisch-chirurgischen Josephs-Akademie, außerordentlichem Mitgliede der mährischen Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde zu Brünn, Ehrenmitgliede der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, und der Gesellschaft des vaterländischen Museums in Böhmen, dann Mitgliede der k. k. Landesgesellschaft in Wien, und der gelehrten medicinischen Gesellschaft zu Venedig, Padua und London, dann der kais. Leopold-Carolinischen der Naturforscher, wie auch der russisch-kaiserlichen medicinisch-chirurgischen Akademie zu Petersburg, der Universität zu Krakau, und der k. k. Akademie der vereinigten bildenden Künste in Wien,

&c. &c.

in tiefester Ehrfurcht

gewidmet

vom Verfasser.

Euer Excellenz!

Die hohen Verdienste, welche sich **Euer Excellenz** unter den Auspicien des besten und weisesten Monarchen um die Wissenschaften überhaupt, und ganz besonders um die mathematischen, erworben haben, und die Humanität, mit welcher **Euer Excellenz** Talente zu wecken, und den guten Willen für die That zu nehmen gewohnt sind, haben mir das Zutrauen eingeflößt, die gegenwärtige Schrift als ein Zeichen meiner Hochachtung und Ergebenheit **Euer Excellenz** zu widmen.

Euer Excellenz hielten meinen Versuch der mir unschätzbaren Ehre werth, ihm durch Vorsetzung **Ihres** in der Monarchie allgemein verehrten Namens eine besondere Zierde zu ertheilen.

Erlauben **Euer Excellenz** meinen innigsten Dank für diese unverdiente Gewogenheit öffentlich aussprechen, und die Versicherung beifügen zu dürfen, daß ich, durch diese meinem Werkchen gewordene Auszeichnung aufgemuntert, alle meine Kräfte mit doppeltem Eifer dem Staate und der Wissenschaft widmen werde.

Ich verharre in tiefester Ehrfurcht

EUER EXCELLENZ

unterthänigst ergebenster

Franz Xav. Moth.

Vorwort.

Lagrange entwickelt in einer seiner Abhandlungen *) mehrere sehr merkwürdige Relationen, die er anwendet, um einige die dreiseitige Pyramide betreffende Aufgaben zu lösen. Diese Relationen, welche schon an sich selbst sehr merkwürdig sind, haben nicht nur bei Auflösung der in jener Abhandlung vorkommenden Aufgaben ihren Gebrauch, sondern gewähren noch bei anderweitigen Untersuchungen der analytischen Geometrie und Dynamik großen Nutzen.

Es ist bereits ein halbes Jahrhundert verflossen, seit sie uns dieser große Analyst mitgetheilt hat, und noch sind sie nicht so allgemein bekannt, als sie es wohl zu seyn verdienten. Sie enthalten in der That weit mehr, als man in ihnen zu finden vermuthet, da sie sich bei so vielen Untersuchungen der analytischen Geometrie zugleich als eines der wichtigsten Hilfsmittel bewähren. Daher glaube ich etwas Verdienstliches zu unternehmen, wenn ich durch Herausgabe dieser Schrift dazu beitrage, diese Relationen bekannter zu machen, und die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sie hinzulenken.

---

*) M. s. Memoires de l'acad. roy. des scienc. et des bell. lett. de Berlin, A. 1773. p. 149 — 176.

Ich habe nun dieselben in dieser Schrift durch ein, von dem des Lagrange verschiedenes, Verfahren entwickelt, um eine bedeutende Anzahl vermehrt, und auf einen der wichtigsten Theile der Geometrie angewandt, indem ich zeige, mit welcher Präcision, Eleganz und Leichtigkeit alle Gleichungen der sphärischen Trigonometrie aus ihnen hergeleitet werden können.

Prag, den 13ten October 1828.

Moth.

Erste Abtheilung.

Darstellung der Lagrange'schen Relationen.

I.

Zusammenstellung formirter Ausdrücke.

1. Es seien:

$$A' \; A'' \; A''' \; B' \; B'' \; B''' \; C' \; C'' \; C'''$$

neun willkührliche Größen, aus welchen man gewisse andere Ausdrücke zusammensetzt, und für welche Ausdrücke der leichtern Uebersicht wegen wieder einzelne Buchstaben substituirt werden.

Man setze nun:

$$\left.\begin{array}{l}(B''\cdot C'''-B'''\cdot C'')=A_{,};\;(B'''\cdot C'-B'\cdot C''')=A_{,,};\;(B'\cdot C''-B''\cdot C')=A_{,,,};\\(C''\cdot A'''-C'''\cdot A'')=B_{,};\;(C'''\cdot A'-C'\cdot A''')=B_{,,};\;(C'\cdot A''-C''\cdot A')=B_{,,,};\\(A''\cdot B'''-A'''\cdot B'')=C_{,};\;(A'''\cdot B'-A'\cdot B''')=C_{,,};\;(A'\cdot B''-A''\cdot B')=C_{,,,};\end{array}\right\}\;[1]$$

Ferner:

$$\left.\begin{array}{l}(B_{,,}\cdot C_{,,,}-B_{,,,}\cdot C_{,,})=\mathfrak{A}_{,};\;(B_{,,,}\cdot C_{,}-B_{,}\cdot C_{,,,})=\mathfrak{A}_{,,};\;(B_{,}\cdot C_{,,}-B_{,,}\cdot C_{,})=\mathfrak{A}_{,,,};\\(C_{,,}\cdot A_{,,,}-C_{,,,}\cdot A_{,,})=\mathfrak{B}_{,};\;(C_{,,,}\cdot A_{,}-C_{,}\cdot A_{,,,})=\mathfrak{B}_{,,};\;(C_{,}\cdot A_{,,}-C_{,,}\cdot A_{,})=\mathfrak{B}_{,,,};\\(A_{,,}\cdot B_{,,,}-A_{,,,}\cdot B_{,,})=\mathfrak{C}_{,};\;(A_{,,,}\cdot B_{,}-A_{,}\cdot B_{,,,})=\mathfrak{C}_{,,};\;(A_{,}\cdot B_{,,}-A_{,,}\cdot B_{,})=\mathfrak{C}_{,,,};\end{array}\right\}\;[2]$$

Die Ausdrücke [2] sind, wie man sieht, auf dieselbe Art aus den Größen $A, B, C, A_{,,}$ u. s. w. zusammengesetzt, wie diese Größen aus A' B' C' A'' u. s. w.

Ferner nehmen wir an:

$$\left.\begin{array}{l}A''\cdot A'''+B''\cdot B'''+C''\cdot C'''=M';\\A'\cdot A'''+B'\cdot B'''+C'\cdot C'''=M'';\\A'\cdot A''+B'\cdot B''+C'\cdot C''=M''';\end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;[3]$$

und:

$$\left.\begin{array}{l}A_{,,}\cdot A_{,,,}+B_{,,}\cdot B_{,,,}+C_{,,}\cdot C_{,,,}=E';\\A_{,}\cdot A_{,,,}+B_{,}\cdot B_{,,,}+C_{,}\cdot C_{,,,}=E'';\\A_{,}\cdot A_{,,}+B_{,}\cdot B_{,,}+C_{,}\cdot C_{,,}=E''';\end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;[4]$$

Die Ausdrücke M' M'' M''' finden sich eben so aus den Größen A' B' C' A'' u. s. w. zusammengesetzt, wie die Ausdrücke E' E'' E''' aus den homologen Größen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ u. s. w.

Ferner sei:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} + \mathfrak{B}_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} + \mathfrak{C}_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} = K'\,; \\ \mathfrak{A}_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} + \mathfrak{B}_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} + \mathfrak{C}_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} = K''\,; \\ \mathfrak{A}_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + \mathfrak{B}_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + \mathfrak{C}_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} = K'''\,; \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad [5]$$

Die Größen $\mathfrak{A}_{,}$ $\mathfrak{B}_{,}$ $\mathfrak{C}_{,}$ $\mathfrak{A}_{,,}$ u. s. w. setzen nemlich die Ausdrücke K' K'' K''' auf eine ähnliche Art zusammen, als die Größen A' B' C' A'' u. s. w. die Ausdrücke M' M'' M'''.

Weiter formire man nachstehende Größen:

$$\left.\begin{array}{l} A'^2 + B'^2 + C'^2 = P'^2\,; \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = P''^2\,; \\ A'''^2 + B'''^2 + C'''^2 = P'''^2\,; \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad [6]$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{,}^2 + B_{,}^2 + C_{,}^2 = V'^2\,; \\ A_{,,}^2 + B_{,,}^2 + C_{,,}^2 = V''^2\,; \\ A_{,,,}^2 + B_{,,,}^2 + C_{,,,}^2 = V'''^2\,; \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad [7]$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}_{,}^2 + \mathfrak{B}_{,}^2 + \mathfrak{C}_{,}^2 = \mathfrak{P}'^2\,; \\ \mathfrak{A}_{,,}^2 + \mathfrak{B}_{,,}^2 + \mathfrak{C}_{,,}^2 = \mathfrak{P}''^2\,; \\ \mathfrak{A}_{,,,}^2 + \mathfrak{B}_{,,,}^2 + \mathfrak{C}_{,,,}^2 = \mathfrak{P}'''^2\,; \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad [8]$$

Die Ausdrücke $\mathfrak{P}'^2$ $\mathfrak{P}''^2$ $\mathfrak{P}'''^2$ hängen auf dieselbe Weise von den Größen $\mathfrak{A}_{,}$ $\mathfrak{B}_{,}$ $\mathfrak{C}_{,}$ $\mathfrak{A}_{,,}$ u. s. w. ab, so wie die Ausdrücke V'^2 V''^2 V'''^2 von den Größen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ u. s. w., und die Ausdrücke P'^2 P''^2 P'''^2 von den Größen A' B' C' A'' u. s. w.

Ferner sei:

$$N = [A'B''C''' + A''B'''C' + A'''B'C'' - A'B'''C'' - A''B'C''' - A'''B''C']\,; \quad [9]$$

und

$$\mathfrak{N} = [A_{,}B_{,,}C_{,,,} + A_{,,}B_{,,,}C_{,} + A_{,,,}B_{,}C_{,,} - A_{,}B_{,,,}C_{,,} - A_{,,}B_{,}C_{,,,} - A_{,,,}B_{,,}C_{,}]\,; \quad [10]$$

Von diesen zwei Ausdrücken ist $\mathfrak{N}$ eben so aus den Größen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ u. s. w. zusammengesetzt, als der Ausdruck N aus den Größen A' B' C'' A'' u. s. w.

Ueberhaupt sind die Ausdrücke:

$$A_{,}\, A_{,,}\, A_{,,,}\, B_{,}\, B_{,,}\, B_{,,,}\, C_{,}\, C_{,,}\, C_{,,,}\, M'\, M''\, M'''\, P'\, P''\, P'''\, N$$

nach eben denselben Gesetzen von den neun Größen:

$$A'\ A''\ A'''\ B'\ B''\ B'''\ C'\ C''\ C'''$$

abhängig, wie die respectiven Ausdrücke:

$$\mathfrak{A}_{,}, \mathfrak{A}_{,,}, \mathfrak{A}_{,,,}\ \mathfrak{B}_{,}, \mathfrak{B}_{,,}, \mathfrak{B}_{,,,}\ \mathfrak{C}_{,}, \mathfrak{C}_{,,}, \mathfrak{C}_{,,,}\ E' E'' E'''\ V' V'' V'''\ \mathfrak{N}$$

von den neun Größen:

$$A_{,}\ A_{,,}\ A_{,,,}\ B_{,}\ B_{,,}\ B_{,,,}\ C_{,}\ C_{,,}\ C_{,,,}.$$

Endlich setze man noch:

$$\left.\begin{array}{l}
(B' \cdot C_{,,} - B_{,,} \cdot C') = \mathfrak{A}'_{,,};\ (C' \cdot A_{,,} - C_{,,} \cdot A') = \mathfrak{B}'_{,,};\ (A' \cdot B_{,,} - A_{,,} \cdot B') = \mathfrak{C}'_{,,};\\
(C'' \cdot B_{,} - C_{,} \cdot B'') = \mathfrak{A}''_{,};\ (A'' \cdot C_{,} - A_{,} \cdot C'') = \mathfrak{B}''_{,};\ (B'' \cdot A_{,} - B_{,} \cdot A'') = \mathfrak{C}''_{,};\\
(C' \cdot B_{,,,} - C_{,,,} \cdot B') = \mathfrak{A}'_{,,,};\ (A' \cdot C_{,,,} - A_{,,,} \cdot C') = \mathfrak{B}'_{,,,};\ (B' \cdot A_{,,,} - B_{,,,} \cdot A') = \mathfrak{C}'_{,,,};\\
(B''' \cdot C_{,} - C''' \cdot B_{,}) = \mathfrak{A}'''_{,};\ (C''' \cdot A_{,} - C_{,} \cdot A''') = \mathfrak{B}'''_{,};\ (A''' \cdot B_{,} - A_{,} \cdot B''') = \mathfrak{C}'''_{,};\\
(B'' \cdot C_{,,,} - C'' \cdot B_{,,,}) = \mathfrak{A}''_{,,,};\ (C'' \cdot A_{,,,} - C_{,,,} \cdot A'') = \mathfrak{B}''_{,,,};\ (A'' \cdot B_{,,,} - A_{,,,} \cdot B'') = \mathfrak{C}''_{,,,};\\
(C''' \cdot B_{,,} - C_{,,} \cdot B''') = \mathfrak{A}'''_{,,};\ (A''' \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C''') = \mathfrak{B}'''_{,,};\ (B''' \cdot A_{,,} - B_{,,} \cdot A''') = \mathfrak{C}'''_{,,};
\end{array}\right\}\ [11]$$

Unter diesen in eilf Systeme vertheilten Ausdrücken finden nun jene merkwürdigen Relationen Statt, welche ich die Lagrange'schen nenne, weil dieser Analyst die erste Idee davon gegeben hat.

II.

Ableitung der Lagrange'schen Relationen, welche unter den formirten Ausdrücken Statt finden.

---

2. Wenn man die Ausdrücke $A_{,}$ $A_{,,}$ $A_{,,,}$ der Gl. [1] respective mit den Größen B' B'' B''' oder C' C'' C''' multiplicirt, und hierauf verbindet; wenn man eben so die Ausdrücke $B_{,}$ $B_{,,}$ $B_{,,,}$ derselben Gl. [1] respective mit den Größen A' A'' A''' oder C' C'' C''' multiplicirt, und hierauf wieder addirt; wenn man endlich auf gleiche Weise die Ausdrücke $C_{,}$ $C_{,,}$ $C_{,,,}$ respective mit den Größen A' A'' A''' oder B' B'' B''' multiplicirt, und hierauf in eine Summe bringt; so wird man finden, daß sich eine jede dieser Summen auf Null reducire, und man wird unter diesen Ausdrücken nachstehende Relationen haben:

$$\left.\begin{array}{l}
B' \cdot A_{,} + B'' \cdot A_{,,} + B''' \cdot A_{,,,} = 0;\ C' \cdot A_{,} + C'' \cdot A_{,,} + C''' \cdot A_{,,,} = 0;\\
A' \cdot B_{,} + A'' \cdot B_{,,} + A''' \cdot B_{,,,} = 0;\ C' \cdot B_{,} + C'' \cdot B_{,,} + C''' \cdot B_{,,,} = 0;\\
A' \cdot C_{,} + A'' \cdot C_{,,} + A''' \cdot C_{,,,} = 0;\ B' \cdot C_{,} + B'' \cdot C_{,,} + B''' \cdot C_{,,,} = 0;
\end{array}\right\}\ [12]$$

Wenn man die Ausdrücke $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ der Gl. [1] respective mit den Größen A'' B'' C'' oder A''' B''' C''' multiplicirt, und hierauf in Verbindung bringt; wenn man eben so die Ausdrücke $A_{,,}$ $B_{,,}$ $C_{,,}$ respective mit den Größen A' B' C' oder A''' B''' C''' multiplicirt, und hierauf addirt; wenn man endlich auf gleiche Weise die Ausdrücke $A_{,,,}$ $B_{,,,}$ $C_{,,,}$ respective mit den Größen A' B' C' oder A'' B'' C'' multiplicirt, und hierauf in eine Summe bringt; so reducirt sich jede dieser Summen auf Null, und man wird haben:

$$\left.\begin{array}{ll} A''\cdot A_{,} + B''\cdot B_{,} + C''\cdot C_{,} = 0; & A'''\cdot A_{,} + B'''\cdot B_{,} + C'''\cdot C_{,} = 0; \\ A'\cdot A_{,,} + B'\cdot B_{,,} + C'\cdot C_{,,} = 0; & A'''\cdot A_{,,} + B'''\cdot B_{,,} + C'''\cdot C_{,,} = 0; \\ A'\cdot A_{,,,} + B'\cdot B_{,,,} + C'\cdot C_{,,,} = 0; & A''\cdot A_{,,,} + B''\cdot B_{,,,} + C''\cdot C_{,,,} = 0; \end{array}\right\} [13]$$

Wenn man endlich die Ausdrücke $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ mit A' B' C'; oder $A_{,,}$ $B_{,,}$ $C_{,,}$ mit A'' B'' C''; oder A''' B''' C''' mit A''' B''' C''' respective multiplicirt, und diese Producte in eine Summe bringt: oder wenn man die Ausdrücke $A_{,}$ $A_{,,}$ $A_{,,,}$ mit A' A'' A'''; oder $B_{,}$ $B_{,,}$ $B_{,,,}$ mit B' B'' B'''; oder $C_{,}$ $C_{,,}$ $C_{,,,}$ mit C' C'' C''' respective multiplicirt, und wieder sämmtliche drei Producte in eine Summe bringt; so wird man in jedem dieser sechs Fälle die Größe N zum Vorschein kommen sehen. Ueberhaupt also wird der Ausdruck N durch nachstehende Formen gegeben werden können:

$$\left.\begin{array}{l} N = A'\cdot A_{,} + B'\cdot B_{,} + C'\cdot C_{,}; \\ N = A''\cdot A_{,,} + B''\cdot B_{,,} + C''\cdot C_{,,}; \\ N = A'''\cdot A_{,,,} + B'''\cdot B_{,,,} + C'''\cdot C_{,,,}; \\ N = A'\cdot A_{,} + B'\cdot B_{,} + C'\cdot C_{,}; \\ N = A''\cdot A_{,,} + B''\cdot B_{,,} + C''\cdot C_{,,}; \\ N = A'''\cdot A_{,,,} + B'''\cdot B_{,,,} + C'''\cdot C_{,,,}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [14]$$

3. Den Relationen [12], [13], [14] analog wird man haben:

$$\left.\begin{array}{ll} B_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} = 0; & C_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} = 0; \\ A_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,} + A_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} = 0; & C_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} = 0; \\ A_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,} + A_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} + A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} = 0; & B_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} = 0; \end{array}\right\} [15]$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,} = 0; & A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}_{,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,} = 0; \\ A_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} = 0; & A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} = 0; \\ A_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} = 0; & A_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} = 0; \end{array}\right\} [16]$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= (A_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,});\\
\mathfrak{N} &= (A_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,});\\
\mathfrak{N} &= (A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,});\\
\mathfrak{N} &= (A_{,}\cdot\mathfrak{A}_{,} + A_{,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,} + A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}_{,,,});\\
\mathfrak{N} &= (B_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,});\\
\mathfrak{N} &= (C_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,});
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [17]$$

4. Wir wollen itzt die Ausdrücke $\mathfrak{A}_{,}$, $\mathfrak{A}_{,,}$, $\mathfrak{A}_{,,,}$, $\mathfrak{B}_{,}$ u. s. w. näher betrachten, und sehen, worauf uns ihre Entwicklungen führen.

Setzt man also in der Gleichung:

$$\mathfrak{A}_{,} = (B_{,,}\cdot C_{,,,} - B_{,,,}\cdot C_{,,})$$

anstatt $B_{,,}$ und $B_{,,,}$ die Ausdrücke, welche sie bedeuten, aus den Gl. [1]; so wird man erhalten:

$$\mathfrak{A}_{,} = [(A'\cdot C''' - A'''\cdot C')\cdot C_{,,,} - (A''\cdot C' - A'\cdot C'')\cdot C_{,,}].$$

Wird dieser Ausdruck entwickelt, und werden seine Glieder dergestalt geordnet, daß man schreibt:

$$\mathfrak{A}_{,} = [A'\cdot(C''\cdot C_{,,} + C'''\cdot C_{,,,}) - C'\cdot(A'''\cdot C_{,,,} + A''\cdot C_{,,})];$$

so wird man, wenn man hierin

$$C''\cdot C_{,,} + C'''\cdot C_{,,,} = N - C'\cdot C_{,}$$

setzt, nachstehende Form erhalten:

$$\mathfrak{A}_{,} = [N\cdot A' - C'\cdot(A'\cdot C_{,} + A''\cdot C_{,,} + A'''\cdot C_{,,,})].$$

Nun ist gemäß Relationen [12]:

$$A'\cdot C_{,} + A''\cdot C_{,,} + A'''\cdot C_{,,,} = 0;$$

folglich erhält man den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_{,} = N\cdot A'.$$

Auf dieselbe Weise wird man alle übrigen Ausdrücke [2] behandeln können; daher man nachstehende Relationen haben wird:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{,} &= N\cdot A'; & \mathfrak{B}_{,} &= N\cdot B'; & \mathfrak{C}_{,} &= N\cdot C';\\
\mathfrak{A}_{,,} &= N\cdot A''; & \mathfrak{B}_{,,} &= N\cdot B''; & \mathfrak{C}_{,,} &= N\cdot C'';\\
\mathfrak{A}_{,,,} &= N\cdot A'''; & \mathfrak{B}_{,,,} &= N\cdot B'''; & \mathfrak{C}_{,,,} &= N\cdot C''';
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [18]$$

5. Werden diese neuen Ausdrücke in die Gleichungen [5] eingeführt; so wird man neuerdings folgende Relationen haben:

$$\left.\begin{aligned}
K' &= N^2\cdot(A''\cdot A''' + B''\cdot B''' + C''\cdot C''') = N^2\cdot M';\\
K'' &= N^2\cdot(A'\cdot A''' + B'\cdot B''' + C'\cdot C''') = N^2\cdot M'';\\
K''' &= N^2\cdot(A'\cdot A'' + B'\cdot B'' + C'\cdot C'') = N^2\cdot M''';
\end{aligned}\right\} \quad [19]$$

Bringt man ferner die für $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{,,}, \mathfrak{A}_{,,,}, \mathfrak{B},$ u. s. w. gefundenen Ausdrücke [18] in die Gleichungen [8]; so werden uns dieselben geben:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}'^2 = N^2\cdot(A'^2 + B'^2 + C'^2); \\ \mathfrak{P}''^2 = N^2\cdot(A''^2 + B''^2 + C''^2); \\ \mathfrak{P}'''^2 = N^2\cdot(A'''^2 + B'''^2 + C'''^2); \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}' = N\cdot P'; \\ \mathfrak{P}'' = N\cdot P''; \\ \mathfrak{P}''' = N\cdot P'''; \end{array}\right\} \quad \dots \quad [20]$$

Setzt man endlich diese Ausdrücke [18] in die Gl. [17]; so wird eine jede von ihnen auf nachstehende sehr bemerkenswerthe Relation führen:

$$\mathfrak{N} = N^2 \quad \dots \quad [21]$$

6. Aus den neun Größen:

$$\mathfrak{A}_,, \mathfrak{B}_,, \mathfrak{C}_,, \mathfrak{A}_{,,}, \mathfrak{B}_{,,}, \mathfrak{C}_{,,}, \mathfrak{A}_{,,,}, \mathfrak{B}_{,,,}, \mathfrak{C}_{,,,}$$

lassen sich ähnliche Ausdrücke, wie [1] oder [2] zusammensetzen und leicht reduciren. Es ist also:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{B}_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,} - \mathfrak{B}_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,}) = \mathfrak{N}\cdot A_, = N^2\cdot A_,; \\ (\mathfrak{A}_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,} - \mathfrak{A}_{,,}\cdot\mathfrak{C}_{,,,}) = \mathfrak{N}\cdot B_, = N^2\cdot B_,; \\ (\mathfrak{A}_{,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,,} - \mathfrak{A}_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_{,,}) = \mathfrak{N}\cdot C_, = N^2\cdot C_,; \\ (\mathfrak{B}_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_, - \mathfrak{B}_,\cdot\mathfrak{C}_{,,,}) = \mathfrak{N}\cdot A_{,,} = N^2\cdot A_{,,}; \\ (\mathfrak{A}_,\cdot\mathfrak{C}_{,,,} - \mathfrak{A}_{,,,}\cdot\mathfrak{C}_,) = \mathfrak{N}\cdot B_{,,} = N^2\cdot B_{,,}; \\ (\mathfrak{A}_{,,,}\cdot\mathfrak{B}_, - \mathfrak{A}_,\cdot\mathfrak{B}_{,,,}) = \mathfrak{N}\cdot C_{,,} = N^2\cdot C_{,,}; \\ (\mathfrak{B}_,\cdot\mathfrak{C}_{,,} - \mathfrak{B}_{,,}\cdot\mathfrak{C}_,) = \mathfrak{N}\cdot A_{,,,} = N^2\cdot A_{,,,}; \\ (\mathfrak{A}_{,,}\cdot\mathfrak{C}_, - \mathfrak{A}_,\cdot\mathfrak{C}_{,,}) = \mathfrak{N}\cdot B_{,,,} = N^2\cdot B_{,,,}; \\ (\mathfrak{A}_,\cdot\mathfrak{B}_{,,} - \mathfrak{A}_{,,}\cdot\mathfrak{B}_,) = \mathfrak{N}\cdot C_{,,,} = N^2\cdot C_{,,,}; \end{array}\right\} \quad \dots \quad [22]$$

7. Wenn man von den drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} N = A'\cdot A_, + A''\cdot A_{,,} + A'''\cdot A_{,,,}; \\ 0 = B'\cdot A_, + B''\cdot A_{,,} + B'''\cdot A_{,,,}; \\ 0 = C'\cdot A_, + C''\cdot A_{,,} + C'''\cdot A_{,,,}; \end{array}\right\} \quad \dots \quad (a)$$

die erste mit A', die zweite mit B' und die dritte mit C' multiplicirt, dieselben in eine Summe bringt, und zur Reduction dieser Gleichung von den Relationen [6] und [3] Gebrauch macht; so wird man erhalten:

$$P'^2\cdot A_, + M'''\cdot A_{,,} + M''\cdot A_{,,,} = N\cdot A' = \mathfrak{A}_,.$$

Auf diese Gleichung würde man auch noch gelangen können, wenn man von den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} P'^2 = A'\cdot A' + B'\cdot B' + C'\cdot C'; \\ M''' = A''\cdot A' + B''\cdot B' + C''\cdot C'; \\ M'' = A'''\cdot A' + B'''\cdot B' + C'''\cdot C'; \end{array}\right\} \quad \dots \quad (b)$$

die erste mit $A_{,}$, die zweite mit $A_{,,}$ und die dritte mit $A_{,,,}$ multiplicirt, und hierauf in eine Summe gebracht hätte; denn man wird finden, daß die Reduction dieser erhaltenen Gleichung, wenn man von den Gleichungen (a) dabei Gebrauch macht, unmittelbar wieder auf die gefundene Gleichung führe.

Außer dieser Relation gibt es noch acht ähnliche, welche man durch ein diesem analoges Verfahren ableitet, so daß man nachstehendes System von Gleichungen haben wird:

$$\left.\begin{aligned} N\cdot A' &= \mathfrak{A}_{,} = P'^2\cdot A_{,} + M'''\cdot A_{,,} + M''\cdot A_{,,,}; \\ N\cdot B' &= \mathfrak{B}_{,} = P'^2\cdot B_{,} + M'''\cdot B_{,,} + M''\cdot B_{,,,}; \\ N\cdot C' &= \mathfrak{C}_{,} = P'^2\cdot C_{,} + M'''\cdot C_{,,} + M''\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [23]$$

$$\left.\begin{aligned} N\cdot A'' &= \mathfrak{A}_{,,} = M'''\cdot A_{,} + P''^2\cdot A_{,,} + M'\cdot A_{,,,}; \\ N\cdot B'' &= \mathfrak{B}_{,,} = M'''\cdot B_{,} + P''^2\cdot B_{,,} + M'\cdot B_{,,,}; \\ N\cdot C'' &= \mathfrak{C}_{,,} = M'''\cdot C_{,} + P''^2\cdot C_{,,} + M'\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [24]$$

$$\left.\begin{aligned} N\cdot A''' &= \mathfrak{A}_{,,,} = M''\cdot A_{,} + M'\cdot A_{,,} + P'''^2\cdot A_{,,,}; \\ N\cdot B''' &= \mathfrak{B}_{,,,} = M''\cdot B_{,} + M'\cdot B_{,,} + P'''^2\cdot B_{,,,}; \\ N\cdot C''' &= \mathfrak{C}_{,,,} = M''\cdot C_{,} + M'\cdot C_{,,} + P'''^2\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [25]$$

Werden die Relationen [23], [24], [25] mit N^2 multiplicirt, und bedient man sich bei den Reductionen ihrer einzelnen Glieder der Relationen [19] und [20]; so wird man nachstehende, den drei vorhergehenden ähnliche Systeme von Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} N^3\cdot A' &= \mathfrak{P}'^2\cdot A_{,} + K'''\cdot A_{,,} + K''\cdot A_{,,,}; \\ N^3\cdot B' &= \mathfrak{P}'^2\cdot B_{,} + K'''\cdot B_{,,} + K''\cdot B_{,,,}; \\ N^3\cdot C' &= \mathfrak{P}'^2\cdot C_{,} + K'''\cdot C_{,,} + K''\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [26]$$

$$\left.\begin{aligned} N^3\cdot A'' &= K'''\cdot A_{,} + \mathfrak{P}''^2\cdot A^2_{,,} + K'\cdot A_{,,,}; \\ N^3\cdot B'' &= K'''\cdot B_{,} + \mathfrak{P}''^2\cdot B^2_{,,} + K'\cdot B_{,,,}; \\ N^3\cdot C'' &= K'''\cdot C_{,} + \mathfrak{P}''^2\cdot C^2_{,,} + K'\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [27]$$

$$\left.\begin{aligned} N^3\cdot A''' &= K''\cdot A_{,} + K'\cdot A_{,,} + \mathfrak{P}'''^2\cdot A_{,,,}; \\ N^3\cdot B''' &= K''\cdot B_{,} + K'\cdot B_{,,} + \mathfrak{P}'''^2\cdot B_{,,,}; \\ N^3\cdot C''' &= K''\cdot C_{,} + K'\cdot C_{,,} + \mathfrak{P}'''^2\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots [28]$$

8. Wenn man von den drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} N &= A'\cdot A_{,} + A''\cdot A_{,,} + A'''\cdot A_{,,,}; \\ 0 &= A'\cdot B_{,} + A''\cdot B_{,,} + A'''\cdot B_{,,,}; \\ 0 &= A'\cdot C_{,} + A''\cdot C_{,,} + A'''\cdot C_{,,,}; \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (a)$$

die erste mit $A_,$, die zweite mit $B_,$ und die dritte mit $C_,$ multiplicirt, hierauf verbindet, und bei der Reducirung der so erhaltenen Gleichung auf die Relationen [7] und [4] Rücksicht nimmt; so wird die zum Vorschein kommende Gleichung seyn:

$$N \cdot A_, = V'^2 \cdot A' + E''' \cdot A'' + E'' \cdot A'''.$$

Diese Gleichung würde man auch noch erhalten können, wenn man von den drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} V'^2 = A_, \cdot A_, + B_, \cdot B_, + C_, \cdot C_, \,; \\ E''' = A_, \cdot A_{,,} + B_, \cdot B_{,,} + C_, \cdot C_{,,} \,; \\ E'' = A_, \cdot A_{,,,} + B_, \cdot B_{,,,} + C_, \cdot C_{,,,} \,; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

die erste mit A', die zweite mit A'' und die dritte mit A''' multiplicirt, hierauf in eine Summe gebracht, und bei Reducirung dieser Gleichung von den Gleichungen (a) Gebrauch gemacht hätte.

Außer dieser gefundenen Relation existiren noch acht andere, welche ihr ähnlich sind, und die man durch das nemliche Verfahren entdeckt, so daß man nachstehende drei Systeme von Gleichungen haben wird:

$$\left.\begin{array}{l} N \cdot A_, = V'^2 \cdot A' + E''' \cdot A'' + E'' \cdot A''' \,; \\ N \cdot B_, = V'^2 \cdot B' + E''' \cdot B'' + E'' \cdot B''' \,; \\ N \cdot C_, = V'^2 \cdot C' + E''' \cdot C'' + E'' \cdot C''' \,; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [29]$$

$$\left.\begin{array}{l} N \cdot A_{,,} = E''' \cdot A' + V''^2 \cdot A'' + E' \cdot A''' \,; \\ N \cdot B_{,,} = E''' \cdot B' + V''^2 \cdot B'' + E' \cdot B''' \,; \\ N \cdot C_{,,} = E''' \cdot C' + V''^2 \cdot C'' + E' \cdot C''' \,; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [30]$$

$$\left.\begin{array}{l} N \cdot A_{,,,} = E'' \cdot A' + E' \cdot A'' + V'''^2 \cdot A''' \,; \\ N \cdot B_{,,,} = E'' \cdot B' + E' \cdot B'' + V'''^2 \cdot B''' \,; \\ N \cdot C_{,,,} = E'' \cdot C' + E' \cdot C'' + V'''^2 \cdot C''' \,; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [31]$$

Werden diese Relationen mit N multiplicirt, und reducirt man die einzelnen Glieder dieser Gleichungen, indem man von den Relationen [18] Gebrauch macht; so wird man noch folgende drei Systeme von Gleichungen aus ihnen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} N^2 \cdot A_, = V'^2 \cdot \mathfrak{A}_, + E''' \cdot \mathfrak{A}_{,,} + E'' \cdot \mathfrak{A}_{,,,} \,; \\ N^2 \cdot B_, = V'^2 \cdot \mathfrak{B}_, + E''' \cdot \mathfrak{B}_{,,} + E'' \cdot \mathfrak{B}_{,,,} \,; \\ N^2 \cdot C_, = V'^2 \cdot \mathfrak{C}_, + E''' \cdot \mathfrak{C}_{,,} + E'' \cdot \mathfrak{C}_{,,,} \,; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [32]$$

$$\left.\begin{array}{l} N^2 \cdot A_{,,} = E''' \cdot \mathfrak{A}_, + V''^2 \cdot \mathfrak{A}_{,,} + E' \cdot \mathfrak{A}_{,,,} \,; \\ N^2 \cdot B_{,,} = E''' \cdot \mathfrak{B}_, + V''^2 \cdot \mathfrak{B}_{,,} + E' \cdot \mathfrak{B}_{,,,} \,; \\ N^2 \cdot C_{,,} = E''' \cdot \mathfrak{C}_, + V''^2 \cdot \mathfrak{C}_{,,} + E' \cdot \mathfrak{C}_{,,,} \,; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [33]$$

$$\left.\begin{aligned} N^2\cdot A_{,,,} &= E''\cdot\mathfrak{A}_{,} + E'\cdot\mathfrak{A}_{,,} + V'''^2\cdot\mathfrak{A}_{,,,}\,; \\ N^2\cdot B_{,,,} &= E''\cdot\mathfrak{B}_{,} + E'\cdot\mathfrak{B}_{,,} + V'''^2\cdot\mathfrak{B}_{,,,}\,; \\ N^2\cdot C_{,,,} &= E''\cdot\mathfrak{C}_{,} + E'\cdot\mathfrak{C}_{,,} + V'''^2\cdot\mathfrak{C}_{,,,}\,; \end{aligned}\right\} \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad [34]$$

Es ist einleuchtend, daß die Relationen [29], [30], [31] respective aus den Relationen [23], [24], [25] hervorgehen, wenn man in diesen

anstatt: $A'\,B'\,C'\,A''\cdots P'\,P''\,P'''\,M'\,M''\,M'''$,

setzet: $A_{,}\,B_{,}\,C_{,}\,A_{,,}\cdots V'\,V''\,V'''\,E'\,E''\,E'''$;

weil die Größen P und M auf dieselbe Weise aus den Größen $A'\,B'\,C'\,A''\cdots$ zusammengesetzt sind, als die Größen V und E aus den Größen $A_{,}\,B_{,}\,C_{,}\,A_{,,}\cdots$, so wie dieß schon oben angemerkt worden ist.

9. Die Ausdrücke, welche wir mit $\mathfrak{A}'_{,,}$ $\mathfrak{B}'_{,,}$ $\mathfrak{C}'_{,,}$ u. s. w. bezeichnet haben, und die man in [11] zusammengestellt findet, kann man noch durch einige einfache Reductionen unter andere Gestalten bringen. Die Art der Transformation dieser Ausdrücke will ich nur an der Größe $\mathfrak{A}''_{,}$ zeigen, weil so auch alle übrigen umgeformt werden können.

Setzt man also in der Gleichung:

$$\mathfrak{A}''_{,} = (C''\cdot B_{,} - C_{,}\cdot B''\cdot)$$

an die Stelle der Buchstaben $B_{,}$ und $C_{,}$ ihre Bedeutungen aus den Relationen [1]; so wird man haben:

$$\mathfrak{A}''_{,} = [C''\cdot\,(C''\cdot A''' - C'''\cdot A'') - B''\cdot\,(A''\,B''' - A'''\cdot B'')]$$

oder, nach vollständiger Entwicklung dieses Ausdruckes:

$$\mathfrak{A}'' = [A'''\cdot\,(B''^2 + C''^2) - A''\cdot\,(B''\,B''' + C''\,C''')].$$

Setzt man nun weiter:

$$B''^2 + C''^2 = P''^2 - A''^2\,;$$
$$B''\,B''' + C''\,C''' = M' - A''\,A'''\,;$$

so daß man haben wird:

$$\mathfrak{A}''_{,} = [A'''\cdot\,(P''^2 - A''^2) - A''\cdot\,(M' - A''\,A''')]\,;$$

so wird endlich die Entwicklung dieses Ausdruckes geben:

$$\mathfrak{A}''_{,} = (A'''\cdot P''^2 - A''\cdot M').$$

Man wird nun auf diese Weise nachstehende Systeme von Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}''_{,} &= (A'''\cdot P''^2 - A''\cdot M')\,; & \mathfrak{A}'''_{,} &= (A''\cdot P'''^2 - A'''\cdot M')\,; \\ \mathfrak{B}''_{,} &= (B'''\cdot P''^2 - B''\cdot M')\,; & \mathfrak{B}'''_{,} &= (B''\cdot P'''^2 - B'''\cdot M')\,; \\ \mathfrak{C}''_{,} &= (C'''\cdot P''^2 - C''\cdot M')\,; & \mathfrak{C}'''_{,} &= (C''\cdot P'''^2 - C'''\cdot M')\,; \end{aligned}\right\} \cdot\;\cdot\;\cdot \quad [35]$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}'''_{,,} &= (A' \cdot P'''^2 - A''' \cdot M''); & \mathfrak{A}'_{,,} &= (A''' \cdot P'^2 - A' \cdot M''); \\ \mathfrak{B}'''_{,,} &= (B' \cdot P'''^2 - B''' \cdot M''); & \mathfrak{B}'_{,,} &= (B''' \cdot P'^2 - B' \cdot M''); \\ \mathfrak{C}'''_{,,} &= (C' \cdot P'''^2 - C''' \cdot M''); & \mathfrak{C}'_{,,} &= (C''' \cdot P'^2 - C' \cdot M''); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad [36]$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}'_{,,,} &= (A'' \cdot P'^2 - A' \cdot M'''); & \mathfrak{A}''_{,,,} &= (A' \cdot P''^2 - A'' \cdot M'''); \\ \mathfrak{B}'_{,,,} &= (B'' \cdot P'^2 - B' \cdot M'''); & \mathfrak{B}''_{,,,} &= (B' \cdot P''^2 - B'' \cdot M'''); \\ \mathfrak{C}'_{,,,} &= (C'' \cdot P'^2 - C' \cdot M'''); & \mathfrak{C}''_{,,,} &= (C' \cdot P''^2 - C'' \cdot M'''); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad [37]$$

Man kann begierig seyn, zu wissen, worauf die analogen Ausdrücke, wie z. B. $(A_{,,,} \cdot V'^2 - A_{,,} \cdot E')$ führen. Um dieß zu erfahren, braucht man nur für V'^2 und E' aus den Relationen [7] und [4] ihre Bedeutungen in diesem Ausdrucke zu substituiren, und denselben gehörig zu reduciren.

Im gegenwärtigen Beispiele hat man also:

$$\begin{aligned} (A_{,,,} \cdot V'^2 - A_{,,} \cdot E') &= \left.\begin{aligned} & A_{,,,} \cdot (A^2_{,,} + B^2_{,,} + C^2_{,,}) \\ & - A_{,,} \cdot (A_{,,} \cdot A_{,,,} + B_{,,} \cdot B_{,,,} + C_{,,} \cdot C_{,,,}) \end{aligned}\right\} \\ &= [A_{,,,} \cdot (B^2_{,,} + C^2_{,,}) - A_{,,} \cdot (B_{,,} \cdot B_{,,,} + C_{,,} \cdot C_{,,,})] \cdot \\ &= [C_{,,} \cdot (A_{,,,} \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C_{,,,}) - B_{,,} \cdot (A_{,,} \cdot B_{,,,} - B_{,,} A_{,,,})]; \end{aligned}$$

Mit Benützung der Relationen [2] wird man haben:

$$(A_{,,,} \cdot V'^2 - A_{,,} \cdot E') = C_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,}),$$

und endlich mit Benützung der Relationen [18]:

$$(A_{,,,} \cdot V'^2 - A_{,,} \cdot E') = N \cdot (B' \cdot C_{,,} - B_{,,} \cdot C') = N \cdot \mathfrak{A}'_{,,}$$

Auf diese Weise erhält man die nachstehenden Systeme von Relationen, welche den Systemen [35], [36], [37] analog sind.

$$\left.\begin{aligned} N \cdot \mathfrak{A}'_{,,} &= (A_{,,,} \cdot V'^2 - A_{,,} \cdot E'); & N \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} &= (A_{,,} \cdot V''^2 - A_{,,,} \cdot E'); \\ N \cdot \mathfrak{B}'_{,,} &= (B_{,,,} \cdot V'^2 - B_{,,} \cdot E'); & N \cdot \mathfrak{B}'_{,,,} &= (B_{,,} \cdot V''^2 - B_{,,,} \cdot E'); \\ N \cdot \mathfrak{C}'_{,,} &= (C_{,,,} \cdot V'^2 - C_{,,} \cdot E'); & N \cdot \mathfrak{C}'_{,,,} &= (C_{,,} \cdot V''^2 - C_{,,,} \cdot E'); \end{aligned}\right\} \quad [38]$$

$$\left.\begin{aligned} N \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} &= (A_{,} \cdot V''^2 - A_{,,,} \cdot E''); & N \cdot \mathfrak{A}''_{,} &= (A_{,,,} \cdot V'^2 - A_{,} \cdot E''); \\ N \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} &= (B_{,} \cdot V''^2 - B_{,,,} \cdot E''); & N \cdot \mathfrak{B}''_{,} &= (B_{,,,} \cdot V'^2 - B_{,} \cdot E''); \\ N \cdot \mathfrak{C}''_{,,,} &= (C_{,} \cdot V''^2 - C_{,,,} \cdot E''); & N \cdot \mathfrak{C}''_{,} &= (C_{,,,} \cdot V'^2 - C_{,} \cdot E''); \end{aligned}\right\} \quad [39]$$

$$\left.\begin{aligned} N \cdot \mathfrak{A}'''_{,} &= (A_{,,} \cdot V'^2 - A_{,} \cdot E'''); & N \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} &= (A_{,} \cdot V'^2 - A_{,,} \cdot E'''); \\ N \cdot \mathfrak{B}'''_{,} &= (B_{,,} \cdot V'^2 - B_{,} \cdot E'''); & N \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} &= (B_{,} \cdot V'^2 - B_{,,} \cdot E'''); \\ N \cdot \mathfrak{C}'''_{,} &= (C_{,,} \cdot V'^2 - C_{,} \cdot E'''); & N \cdot \mathfrak{C}'''_{,,} &= (C_{,} \cdot V'^2 - C_{,,} \cdot E'''); \end{aligned}\right\} \quad [40]$$

10. Bei Gelegenheit wollen wir noch einige bemerkenswerthe Ausdrücke entwickeln, welche sich als Unterschiede von Producten je zweier der bisher betrachteten Größen darstellen, und wofür wir keine neuen Buchstaben einführen wollen.

Setzt man im Ausdrucke:

$$(B' \cdot C_{\prime} - B_{\prime} \cdot C')$$

an die Stelle von $B_{\prime}$ und $C_{\prime}$ ihre Größen, welche sie gemäß [2] bedeuten; so wird man haben:

$$\begin{aligned}(B' \cdot C_{\prime} - B_{\prime} \cdot C') &= [B' \cdot (A'' \cdot B''' - A''' \cdot B'') - C' \cdot (C'' \cdot A''' - C''' \cdot A'')] \\ &= [A'' \cdot (B' B''' + C' C''') - A''' \cdot (B' B'' + C' C'')] \\ &= [A'' \cdot (M'' - A' \cdot A''') - A''' \cdot (M''' - A' \cdot A'')] \\ &= (A'' \cdot M'' - A''' \cdot M''').\end{aligned}$$

Durch eben dieses Verfahren lassen sich die übrigen homologen Ausdrücke reduciren, welche in ihrer Zusammenstellung nachfolgende Systeme von Relationen bilden:

$$\left.\begin{aligned}(B' \cdot C_{\prime} - B_{\prime} \cdot C') &= (A'' \cdot M'' - A''' \cdot M''');\\ (C' \cdot A_{\prime} - C_{\prime} \cdot A') &= (B'' \cdot M'' - B''' \cdot M''');\\ (A' \cdot B_{\prime} - A_{\prime} \cdot B') &= (C'' \cdot M'' - C''' \cdot M''');\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [41]$$

$$\left.\begin{aligned}(B'' \cdot C_{\prime\prime} - B_{\prime\prime} \cdot C'') &= (A''' \cdot M''' - A' \cdot M');\\ (C'' \cdot A_{\prime\prime} - C_{\prime\prime} \cdot A'') &= (B''' \cdot M''' - B' \cdot M');\\ (A'' \cdot B_{\prime\prime} - A_{\prime\prime} \cdot B'') &= (C''' \cdot M''' - C' \cdot M');\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [42]$$

$$\left.\begin{aligned}(B''' \cdot C_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime\prime} \cdot C''') &= (A' \cdot M' - A'' \cdot M'';\\ (C''' \cdot A_{\prime\prime\prime} - C_{\prime\prime\prime} \cdot A''') &= (B' \cdot M' - B'' \cdot M'';\\ (A''' \cdot B_{\prime\prime\prime} - A_{\prime\prime\prime} \cdot B''') &= (C' \cdot M' - C'' \cdot M'';\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [43]$$

11. Entwickeln wir gleichfalls das Binomium:

$$[B''' \cdot \mathfrak{C}''_{\prime} - C''' \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime}],$$

d. h. setzen wir in dasselbe an die Stelle der Buchstaben $\mathfrak{B}'''_{\prime}$ $\mathfrak{C}''_{\prime}$ die Ausdrücke, welche sie bedeuten; so hat man:

$$\begin{aligned}(B''' \cdot \mathfrak{C}''_{\prime} - C''' \cdot \mathfrak{B}''_{\prime}) &= [B''' \cdot (B'' \cdot A_{\prime} - B_{\prime} \cdot A'') - C''' \cdot (C_{\prime} \cdot A'' - C'' \cdot A_{\prime})] \\ &= [A_{\prime} \cdot (B'' B''' + C'' C''') - A'' \cdot (B_{\prime} \cdot B''' + C_{\prime} \cdot C''')] \\ &= [A_{\prime} \cdot (M' - A'' A''') - A'' \cdot (B_{\prime} \cdot B''' + C_{\prime} \cdot C''')] \\ &= [A_{\prime} \cdot M' - A'' \cdot (A_{\prime} \cdot A''' + B_{\prime} \cdot B''' + C_{\prime} \cdot C''')]\end{aligned}$$

Nun aber ist:

$$A_{\prime} \cdot A''' + B_{\prime} \cdot B''' + C_{\prime} \cdot C''' = 0,$$

gemäß der Relationen [13]; daher reducirt sich jener Ausdruck auf den ganz einfachen $(A_{\prime} \cdot M')$.

Die übrigen dem hier entwickelten Ausdrucke homologen Binomien verstatten dieselben Reductionen, so daß unter diesen Größen nachstehende Systeme von Relationen Statt haben:

$$\left.\begin{aligned}
(B'''\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C'''\cdot\mathfrak{B}''_{,}) &= (C''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) = A_{,}\cdot M'\,;\\
(C'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= (A''\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C''\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) = B_{,}\cdot M'\,;\\
(A'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B'''\cdot\mathfrak{A}''_{,}) &= (B''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A''\cdot\mathfrak{B}'''_{,}) = C_{,}\cdot M'\,;
\end{aligned}\right\}\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[44]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B'\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} - C'\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) &= (C'''\cdot\mathfrak{B}'_{,,} - B'''\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) = A_{,,}\cdot M''\,;\\
(C'\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} - A'\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= (A'''\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - C'''\cdot\mathfrak{A}'_{,,}) = B_{,,}\cdot M''\,;\\
(A'\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - B'\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) &= (B'''\cdot\mathfrak{A}'_{,,} - A'''\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) = C_{,,}\cdot M''\,;
\end{aligned}\right\}\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[45]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B''\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} - C''\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) &= (C'\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B'\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = A_{,,,}\cdot M'''\,;\\
(C''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} - A''\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= (A'\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C'\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) = B_{,,,}\cdot M'''\,;\\
(A''\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} - B''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) &= (B'\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - A'\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) = C_{,,,}\cdot M'''\,;
\end{aligned}\right\}\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[46]$$

12. Wir können auf dieselbe Weise das Binomium:

$$[B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}]$$

entwickeln. Setzt man nemlich wieder an die Stelle der Größen $\mathfrak{B}'_{,,}$ und $\mathfrak{C}'_{,,}$ die Ausdrücke, welche sie vorstellen; so hat man:

$$\begin{aligned}
(B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) &= [B_{,,,}\cdot(A'\cdot B_{,,} - A_{,,}\cdot B') - C_{,,,}\cdot(C'\cdot A_{,,} - C_{,,}\cdot A')]\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\; &= [A'\cdot(B_{,,}\cdot B_{,,,} + C_{,,}\cdot C_{,,,}) - A_{,,}\cdot(B'\cdot B_{,,,} + C'\cdot C_{,,,})]\\
&= [A'\cdot(E' - A_{,,}\cdot A_{,,,}) - A_{,,}\cdot(B'\cdot B_{,,,} + C'\cdot C_{,,,})]\\
&= [A'\cdot E' - A_{,,}\cdot(A'\cdot A_{,,,} + B'\cdot B_{,,,} + C'\cdot C_{,,,})]
\end{aligned}$$

Da nun wieder:

$$A'\cdot A_{,,,} + B'\cdot B_{,,,} + C'\cdot C_{,,,} = 0;$$

so reducirt sich dieser Ausdruck auf die sehr einfache Form:

$$(A'\cdot E').$$

Man wird auf diese Weise drei ähnliche Systeme, als im vorhergehenden Artikel erhalten. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}
(B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) &= (C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) = A'\cdot E'\,;\\
(C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} - A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) &= (A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) = B'\cdot E'\,;\\
(A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} - B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}) &= (B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} - A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) = C'\cdot E'\,;
\end{aligned}\right\}\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[47]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) &= (C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) = A''\cdot E''\,;\\
(C_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - A_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) &= (A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,}) = B''\cdot E''\,;\\
(A_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) &= (B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,}) = C''\cdot E''\,;
\end{aligned}\right\}\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[48]$$

$$\left.\begin{array}{l}(B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) = (C_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) = A'''\cdot E''';\\ (C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = (A_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) = B'''\cdot E''';\\ (A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) = (B_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) = C'''\cdot E''';\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad [49]$$

13. Setzt man im Binomium:

$$. \quad . \quad . \quad . \quad [A_{,,}\cdot E'' - A_{,,,}\cdot E''']$$

an die Stelle der Größen E'' E''' ihre Ausdrücke, welche sie gemäß [4] bedeuten; so wird man haben:

$$(A_{,,}\cdot E'' - A_{,,,}\cdot E''') = \left\{\begin{array}{l} A_{,,}\cdot(A_{,}\cdot A_{,,,} + B_{,}\cdot B_{,,,} + C_{,}\cdot C_{,,,})\\ -A_{,,,}\cdot(A_{,}\cdot A_{,,} + B_{,}\cdot B_{,,} + C_{,,}\cdot C_{,,,})\end{array}\right\}$$

$$= [A_{,,}\cdot(B_{,}\cdot B_{,,,} + C_{,}\cdot C_{,,,}) - A_{,,,}\cdot(B_{,}\cdot B_{,,} + C_{,}\cdot C_{,,})]$$

$$= [B_{,}\cdot(A_{,,}\cdot B_{,,,} - A_{,,,}\cdot B_{,,}) + C_{,}\cdot(A_{,,}\cdot C_{,,,} - A_{,,,}\cdot C_{,,})]$$

$$= (B_{,}\cdot\mathfrak{C}_{,} - C_{,}\cdot\mathfrak{B}_{,}) = N\cdot(B_{,}\cdot C' - C_{,}\cdot B')$$

Nun ist gemäß der Relationen [41]

$$(B'\cdot C_{,} - B_{,}\cdot C') = (A''\cdot M'' - A'''\cdot M''');$$

folglich wird man haben:

$$(A_{,,}\cdot E'' - A_{,,,}\cdot E''') = N\cdot(A'''\cdot M''' - A''\cdot M'').$$

Die übrigen diesen Ausdrücken homologen Binomien verstatten dieselben Transformationen; so daß man nachstehende Systeme von Relationen haben wird:

$$\left.\begin{array}{l}(A_{,,}\cdot E'' - A_{,,,}\cdot E''') = N\cdot(A'''\cdot M''' - A''\cdot M'');\\ (B_{,,}\cdot E'' - B_{,,,}\cdot E''') = N\cdot(B'''\cdot M''' - B''\cdot M'');\\ (C_{,,}\cdot E'' - C_{,,,}\cdot E''') = N\cdot(C'''\cdot M''' - C''\cdot M'');\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [50]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A_{,,,}\cdot E''' - A_{,}\cdot E') = N\cdot(A'\cdot M' - A'''\cdot M''');\\ (B_{,,,}\cdot E''' - B_{,}\cdot E') = N\cdot(B'\cdot M' - B'''\cdot M''');\\ (C_{,,,}\cdot E''' - C_{,}\cdot E') = N\cdot(C'\cdot M' - C'''\cdot M''');\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [51]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A_{,}\cdot E' - A_{,,}\cdot E'') = N\cdot(A''\cdot M'' - A'\cdot M');\\ (B_{,}\cdot E' - B_{,,}\cdot E'') = N\cdot(B''\cdot M'' - A'\cdot M');\\ (C_{,}\cdot E' - C_{,,}\cdot E'') = N\cdot(C''\cdot M'' - A'\cdot M');\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [52]$$

Multiplicirt man die Gleichungen dieser drei Systeme mit N, und setzt auf der andern Seite des Gleichheitszeichens:

$$N^2\cdot M' = K'; \; N^2\cdot M'' = K''; \; N^2\cdot M''' = K''',$$

gemäß der Relationen [19]; so ergeben sich ferner noch folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(A'''\cdot K''' - A''\cdot K'') = N\cdot(A_{,,}\,E'' - A_{,,,}\cdot E''');\\(B'''\cdot K''' - B''\cdot K'') = N\cdot(B_{,,}\cdot E'' - B_{,,,}\cdot E''');\\(C'''\cdot K''' - C''\cdot K'') = N\cdot(C_{,,}\cdot E'' - C_{,,,}\cdot E''');\end{array}\right\}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[53]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A'\cdot K' - A'''\cdot K''') = N\cdot(A_{,,,}\cdot E''' - A_{,}\cdot E');\\(B'\cdot K' - B'''\cdot K''') = N\cdot(B_{,,,}\cdot E''' - B_{,}\cdot E');\\(C'\cdot K' - C'''\cdot K''') = N\cdot(C_{,,,}\cdot E''' - C_{,}\cdot E');\end{array}\right\}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[54]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A''\cdot K'' - A'\cdot K') = N\cdot(A_{,}\cdot E' - A_{,,}\cdot E'');\\(B''\cdot K'' - B'\cdot K') = N\cdot(B_{,}\cdot E' - B_{,,}\cdot E'');\\(C''\cdot K'' - C'\cdot K') = N\cdot(C_{,}\cdot E' - C_{,,}\cdot E'');\end{array}\right\}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad[55]$$

14. Wenn in dem Ausdrucke:

$$[B_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}],$$

an die Stelle der Größen $\mathfrak{B}'_{,,,}$ und $\mathfrak{C}'_{,,,}$ ihre Werthe aus den Relationen [11] gebracht werden; so wird man haben:

$$\begin{aligned}(B_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) &= [B_{,}\cdot(B'\cdot A_{,,,} - A'\cdot B_{,,,}) - C_{,}\cdot(A'\cdot C_{,,,} - C'\cdot A_{,,,})]\\&= [A_{,,,}\cdot(B'\cdot B_{,} + C'\cdot C_{,}) - A'\cdot(B_{,}\cdot B_{,,,} + C_{,}\cdot C_{,,,})]\\&= [A_{,,,}\cdot(N - A'\cdot A_{,}) - A'\cdot(E'' - A_{,}\cdot A_{,,,})]\\&= (N\cdot A_{,,,} - A'\cdot E'').\end{aligned}$$

Diese Transformation der homologen Binomien führt uns auf neue Systeme von Relationen. Da noch, gemäß der Relationen [31]:

$$(N\cdot A_{,,,} - A'\cdot E'') = (A''\cdot E' \pm A'''\cdot V''^{2});$$

so wird man endlich erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = (N\cdot A_{,,,} - A''\cdot E') = (A'\cdot E'' + A'''\cdot V''^{2});\\(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) = (N\cdot B_{,,,} - B''\cdot E') = (B'\cdot E'' + B'''\cdot V''^{2});\\(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - A_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) = (N\cdot C_{,,,} - C''\cdot E') = (C'\cdot E'' + C'''\cdot V''^{2});\end{array}\right\}\;[56]$$

$$\left.\begin{array}{l}(B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) = (N\cdot A_{,,} - B'''\cdot E') = (A'\cdot E''' + A''\cdot V'^{2});\\(C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) = (N\cdot B_{,,} - C'''\cdot E') = (B'\cdot E''' + B''\cdot V'^{2});\\(A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) = (N\cdot C_{,,} - A'''\cdot E') = (C'\cdot E''' + C''\cdot V'^{2});\end{array}\right\}\;[57]$$

$$\left.\begin{array}{l}(C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) = (N\cdot A_{,} - A'''\cdot E'') = (A''\cdot E''' + A'\cdot V'^{2});\\(A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) = (N\cdot B_{,} - B'''\cdot E'') = (B''\cdot E''' + B'\cdot V'^{2});\\(B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,}) = (N\cdot C_{,} - C'''\cdot E'') = (C''\cdot E''' + C'\cdot V'^{2});\end{array}\right\}\;[58]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) &= (N\cdot A_{,,,} - A'\cdot E'') = (A''\cdot E' + A'''\cdot V''^2);\\
(C_{,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} - A_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= (N\cdot B_{,,,} - B'\cdot E'') = (B''\cdot E' + B'''\cdot V''^2);\\
(A_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} - B_{,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) &= (N\cdot C_{,,,} - C'\cdot E'') = (C''\cdot E' + C'''\cdot V''^2);
\end{aligned}\right\}\ [59]$$

$$\left.\begin{aligned}
(C_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} - B_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) &= (N\cdot A_{,,} - A'\cdot E''') = (A'''\cdot E' + A''\cdot V'^2);\\
(A_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - C_{,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}) &= (N\cdot B_{,,} - B'\cdot E''') = (B'''\cdot E' + B''\cdot V'^2);\\
(B_{,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} - A_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) &= (N\cdot C_{,,} - C'\cdot E''') = (C'''\cdot E' + C''\cdot V'^2);
\end{aligned}\right\}\ [60]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,}) &= (N\cdot A_{,} - A''\cdot E''') = (A'''\cdot E'' + A'\cdot V^2);\\
(C_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= (N\cdot B_{,} - B''\cdot E''') = (B'''\cdot E'' + B'\cdot V^2);\\
(A_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,}) &= (N\cdot C_{,} - C''\cdot E''') = (C'''\cdot E'' + C'\cdot V^2);
\end{aligned}\right\}\ [61]$$

15. Setzt man in dem Binomium:

$$(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,})$$

anstatt $\mathfrak{B}'''_{,,}$ $\mathfrak{C}'''_{,,}$ ihre Ausdrücke aus den Relationen [11]; alsdann hat man:

$$\begin{aligned}
(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= [C_{,,}\cdot(A'''\cdot C_{,,} - A_{,,}\cdot C''') - B_{,,}\cdot(B'''\cdot A_{,,} - B_{,,}\cdot A''')]\\
&= [A'''\cdot(B^2_{,,} + C^2_{,,}) - A_{,,}\cdot(B_{,,}\cdot B''' + C_{,,}\cdot C''')]\\
&= [A'''\cdot(V'^2 - A^2_{,,}) - A_{,,}\cdot(B_{,,}\cdot B''' + C_{,,}\cdot C''')]\\
&= [A'''\cdot V'^2 - A_{,,}\cdot(A'''\cdot A_{,,} + B'''\cdot B_{,,} + C'''\cdot C_{,,})]
\end{aligned}$$

Nun ist, gemäß der Relationen [13]

$$A'''\cdot A_{,,} + B'''\cdot B_{,,} + C'''\cdot C_{,,} = 0;$$

folglich reducirt sich das so eben behandelte Binomium auf den sehr einfachen Ausdruck $(A'''\cdot V'^2)$.

Hieraus gehen nun nachstehende Systeme von Relationen hervor:

$$\left.\begin{aligned}
(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= A'''\cdot V'^2; & (B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) &= A''\cdot V''^2;\\
(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) &= B'''\cdot V'^2; & (C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) &= B''\cdot V''^2;\\
(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) &= C'''\cdot V'^2; & (A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) &= C''\cdot V''^2;
\end{aligned}\right\}\ [62]$$

$$\left.\begin{aligned}
(C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} - B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= A'\cdot V''^2; & (B_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,}) &= A'''\cdot V^2;\\
(A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) &= B'\cdot V''^2; & (C_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) &= B'''\cdot V^2;\\
(B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} - A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) &= C'\cdot V''^2; & (A_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) &= C'''\cdot V^2;
\end{aligned}\right\}\ [63]$$

$$\left.\begin{aligned}
(C_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= A''\cdot V^2; & (B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) &= A'\cdot V'^2;\\
(A_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,}) &= B''\cdot V^2; & (C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} - A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) &= B'\cdot V'^2;\\
(B_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,}) &= C''\cdot V^2; & (A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} - B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}) &= C'\cdot V'^2;
\end{aligned}\right\}\ [64]$$

16. Setzt man in dem Binomium:

$$[C''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}]$$

für $\mathfrak{B}''_{,,,}$ und $\mathfrak{C}''_{,,,}$ die Ausdrücke, welche sie gemäß der Relationen [11] bedeuten; so wird man haben:

$$\begin{aligned}(C''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}-B''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) &= [C''\cdot(A_{,,,}\cdot C''-C_{,,,}\cdot A'')-B''\cdot(B_{,,,}\cdot A''-A_{,,,}\cdot B'')]\\ &= [A'''\cdot(B''^2+C''^2)-A''\cdot(B''\cdot B_{,,,}+C''\cdot C_{,,,})]\\ &= [A_{,,,}\cdot(P''^2-A''^2)-A''\cdot(B''\cdot B_{,,,}+C''\cdot C_{,,,})]\\ &= [A_{,,,}\cdot P''^2-A''\cdot(A''\cdot A_{,,,}+B''\cdot B_{,,,}+C''\cdot C_{,,,})];\end{aligned}$$

Nun ist, gemäß der Relationen [11]

$$A''\cdot A_{,,,}+B''\cdot B_{,,,}+C''\cdot C_{,,,}=0;$$

daher sich der eben behandelte Ausdruck auf den sehr einfachen $(A_{,,,}\cdot P''^2)$ reducirt. Da sich die mit ihm homologen Ausdrücke auch so behandeln lassen; so wird man dadurch nachstehende Systeme von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}(C''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}-B''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) &= A_{,,,}\cdot P''^2; & (B'''\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}-C'''\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) &= A_{,,}\cdot P'''^2;\\ (A''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}-C''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) &= B_{,,,}\cdot P''^2; & (C'''\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}-A'''\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= B_{,,}\cdot P'''^2;\\ (B''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}-A''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) &= C_{,,,}\cdot P''^2; & (A'''\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}-B'''\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) &= C_{,,}\cdot P'''^2;\end{aligned}\right\}\ [65]$$

$$\left.\begin{aligned}(C'''\cdot\mathfrak{B}'''_{,}-B'''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) &= A_{,}\cdot P'''^2; & (B'\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}-C'\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) &= A_{,,,}\cdot P'^2;\\ (A'''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}-C'''\cdot\mathfrak{A}''_{,}) &= B_{,}\cdot P'''^2; & (C'\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}-A'\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= B_{,,,}\cdot P'^2;\\ (B'''\cdot\mathfrak{A}'''_{,}-A'''\cdot\mathfrak{B}'''_{,}) &= C_{,}\cdot P'''^2; & (A'\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}-B'\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) &= C_{,,,}\cdot P'^2;\end{aligned}\right\}\ [66]$$

$$\left.\begin{aligned}(C'\cdot\mathfrak{B}'_{,,}-B'\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) &= A_{,,}\cdot P'^2; & (B''\cdot\mathfrak{C}''_{,}-C''\cdot\mathfrak{B}''_{,}) &= A_{,}\cdot P''^2;\\ (A'\cdot\mathfrak{C}'_{,,}-C'\cdot\mathfrak{A}'_{,,}) &= B_{,,}\cdot P'^2; & (C''\cdot\mathfrak{A}''_{,}-A''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= B_{,}\cdot P''^2;\\ (B'\cdot\mathfrak{A}'_{,,}-A'\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) &= C_{,,}\cdot P'^2; & (A''\cdot\mathfrak{B}''_{,}-B''\cdot\mathfrak{A}''_{,}) &= C_{,}\cdot P''^2;\end{aligned}\right\}\ [67]$$

17. Setzen wir ferner im Binomium:

$$[C''\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}-B''\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}]$$

für $\mathfrak{B}'''_{,,}$ und $\mathfrak{C}'''_{,,}$ die Werthe aus den Relationen [11]; so haben wir:

$$\begin{aligned}(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}-B''\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= [C''\cdot(A'''\cdot C_{,,}-A_{,,}\cdot C''')-B''\cdot(B'''\cdot A_{,,}-B_{,,}\cdot A''')]\\ &= [A'''\cdot(B''\cdot B_{,,}+C''\cdot C_{,,})-A_{,,}\cdot(B''\cdot B'''+C''\cdot C_{,,,})]\\ &= [A'''\cdot(N-A''\cdot A_{,,})-A_{,,}\cdot(B''\cdot B_{,,,}+C''\cdot C_{,,,})]\\ &= [N\cdot A'''-A_{,,}\cdot(A''\cdot A'''+B''\cdot B'''+C''\cdot C''')]\\ &= (N\cdot A'''-A_{,,}\cdot M').\end{aligned}$$

Ueberdieß hat man noch, gemäß der Relationen [25]

$$(N\cdot A'''-A_{,,}\cdot M')=(A_{,}\cdot M''+A_{,,,}\cdot P'''^2).$$

Da man nun auf diese Art alle übrigen homologen Binomien reduciren kann; so wird man neuerdings nachstehende Systeme von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
(C'' \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} - B'' \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) &= (N \cdot A''' - A_{,,} \cdot M') = (A_{,} \cdot M'' + A_{,,,} \cdot {P'''}^2);\\
(A'' \cdot \mathfrak{C}'''_{,,} - C'' \cdot \mathfrak{A}'''_{,,}) &= (N \cdot B''' - B_{,,} \cdot M') = (B_{,} \cdot M'' + B_{,,,} \cdot {P'''}^2);\\
(B'' \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} - A'' \cdot \mathfrak{B}'''_{,,}) &= (N \cdot C''' - C_{,,} \cdot M') = (C_{,} \cdot M'' + C_{,,,} \cdot {P'''}^2);
\end{aligned}\right\} \quad [68]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B''' \cdot \mathfrak{C}''_{,,,} - C''' \cdot \mathfrak{B}''_{,,,}) &= (N \cdot A'' - A_{,,,} \cdot M') = (A_{,} \cdot M''' + A_{,,} \cdot {P''}^2);\\
(C''' \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} - A''' \cdot \mathfrak{C}''_{,,,}) &= (N \cdot B'' - B_{,,,} \cdot M') = (B_{,} \cdot M''' + B_{,,} \cdot {P''}^2);\\
(A''' \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} - B''' \cdot \mathfrak{A}''_{,,,}) &= (N \cdot C'' - C_{,,,} \cdot M') = (C_{,} \cdot M''' + C_{,,} \cdot {P''}^2);
\end{aligned}\right\} \quad [69]$$

$$\left.\begin{aligned}
(C''' \cdot \mathfrak{B}'_{,,,} - B''' \cdot \mathfrak{C}'_{,,,}) &= (N \cdot A' - A_{,,,} \cdot M'') = (A_{,,} \cdot M''' + A_{,} \cdot {P'}^2);\\
(A''' \cdot \mathfrak{C}'_{,,,} - C''' \cdot \mathfrak{A}'_{,,,}) &= (N \cdot B' - B_{,,,} \cdot M'') = (B_{,,} \cdot M''' + B_{,} \cdot {P'}^2);\\
(B''' \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} - A''' \cdot \mathfrak{B}'_{,,,}) &= (N \cdot C' - C_{,,,} \cdot M'') = (C_{,,} \cdot M''' + C_{,} \cdot {P'}^2);
\end{aligned}\right\} \quad [70]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B' \cdot \mathfrak{C}'''_{,} - C' \cdot \mathfrak{B}'''_{,}) &= (N \cdot A''' - A_{,} \cdot M'') = (A_{,,} \cdot M' + A_{,,,} \cdot {P'''}^2);\\
(C' \cdot \mathfrak{A}'''_{,} - A' \cdot \mathfrak{C}'''_{,}) &= (N \cdot B''' - B_{,} \cdot M'') = (B_{,,} \cdot M' + B_{,,,} \cdot {P'''}^2);\\
(A' \cdot \mathfrak{B}'''_{,} - B' \cdot \mathfrak{A}'''_{,}) &= (N \cdot C''' - C_{,} \cdot M'') = (C_{,,} \cdot M' + C_{,,,} \cdot {P'''}^2);
\end{aligned}\right\} \quad [71]$$

$$\left.\begin{aligned}
(C' \cdot \mathfrak{B}''_{,} - B' \cdot \mathfrak{C}''_{,}) &= (N \cdot A'' - A_{,} \cdot M''') = (A_{,,,} \cdot M' + A_{,,} \cdot {P''}^2);\\
(A' \cdot \mathfrak{C}''_{,} - C' \cdot \mathfrak{A}''_{,}) &= (N \cdot B'' - B_{,} \cdot M''') = (B_{,,,} \cdot M' + B_{,,} \cdot {P''}^2);\\
(B' \cdot \mathfrak{A}''_{,} - A' \cdot \mathfrak{B}''_{,}) &= (N \cdot C'' - C_{,} \cdot M''') = (C_{,,,} \cdot M' + C_{,,} \cdot {P''}^2);
\end{aligned}\right\} \quad [72]$$

$$\left.\begin{aligned}
(B'' \cdot \mathfrak{C}'_{,,} - C'' \cdot \mathfrak{B}'_{,,}) &= (N \cdot A' - A_{,,} \cdot M''') = (A_{,,,} \cdot M'' + A_{,} \cdot {P'}^2);\\
(C'' \cdot \mathfrak{A}'_{,,} - A'' \cdot \mathfrak{C}'_{,,}) &= (N \cdot B' - B_{,,} \cdot M''') = (B_{,,,} \cdot M'' + B_{,} \cdot {P'}^2);\\
(A'' \cdot \mathfrak{B}'_{,,} - B'' \cdot \mathfrak{A}'_{,,}) &= (N \cdot C' - C_{,,} \cdot M''') = (C_{,,,} \cdot M'' + C_{,} \cdot {P'}^2);
\end{aligned}\right\} \quad [73]$$

18. Setzt man im Binomium:

$$[A_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} + A_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,}]$$

an die Stelle von $\mathfrak{A}'_{,,,}$ und $\mathfrak{A}'_{,,}$ ihre Werthe aus den Relationen [11]; so findet man:

$$\begin{aligned}
(A_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} + A_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,}) &= [A_{,,} \cdot (C' \cdot B_{,,,} - C_{,,,} \cdot B') + A_{,,,} \cdot (B' \cdot C_{,,} - B_{,,} \cdot C')]\\
&= [B' \cdot (A_{,,,} \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C_{,,,}) + C' \cdot (A_{,,} \cdot B_{,,,} - A_{,,,} \cdot B_{,,})]\\
&= (B' \cdot \mathfrak{B}_{,} + C' \cdot \mathfrak{C}_{,}) = N \cdot ({B'}^2 + {C'}^2)\\
&= N \cdot ({P'}^2 - {A'}^2).
\end{aligned}$$

Da die übrigen homologen Binomien sich eben so behandeln lassen; so wird man nachstehende Systeme von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
(A_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} + A_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,}) &= N \cdot ({P'}^2 - {A'}^2);\\
(B_{,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,,} + B_{,,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,}) &= N \cdot ({P'}^2 - {B'}^2);\\
(C_{,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,,} + C_{,,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,}) &= N \cdot ({P'}^2 - {C'}^2);
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [74]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + A_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) = N\cdot(P''^2 - A''^2);\\ (B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) = N\cdot(P''^2 - B''^2);\\ (C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = N\cdot(P''^2 - C''^2);\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [75]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} + A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) = N\cdot(P'''^2 - A'''^2);\\ (B_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,}) = N\cdot(P'''^2 - B'''^2);\\ (C_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) = N\cdot(P'''^2 - C'''^2);\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [76]$$

19. Auf ähnliche Art kann das Binomium:

$$[A''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,}]$$

entwickelt werden, und man findet dafür den Ausdruck:

$$[V'^2 - A^2_{,}]$$

Hieraus werden also nachstehende Relationen entspringen:

$$\left.\begin{array}{l}(A''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,}) = (V'^2 - A^2_{,});\\ (B''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + B'''\cdot\mathfrak{B}''_{,}) = (V'^2 - B^2_{,});\\ (C''\cdot\mathfrak{C}'''_{,} + C'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) = (V'^2 - C^2_{,});\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [77]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A'''\cdot\mathfrak{A}'_{,,} + A'\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) = (V''^2 - A^2_{,,});\\ (B'''\cdot\mathfrak{B}'_{,,} + B'\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) = (V''^2 - B^2_{,,});\\ (C'''\cdot\mathfrak{C}'_{,,} + C'\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) = (V''^2 - C^2_{,,});\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [78]$$

$$\left.\begin{array}{l}(A'\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} + A''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) = (V'''^2 - A^2_{,,,});\\ (B'\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} + B''\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) = (V'''^2 - B^2_{,,,});\\ (C'\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} + C''\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) = (V'''^2 - C^2_{,,,});\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [79]$$

20. Wir wollen itzt noch einige solche Binomien betrachten, welche sich als Unterschiede der Producte je zweier der im Systeme [11] enthaltenen Ausdrücke darstellen.

Setzen wir also im Binomium:

$$[\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - \mathfrak{B}'_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}]$$

für die vorkommenden Factoren die Ausdrücke, welche sie im Systeme der Relationen [11] bedeuten, und entwickle diese Producte gehörig; so wird man erhalten:

$$(\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - \mathfrak{B}'_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) = A'\cdot\left[\begin{array}{l}A'\cdot(B_{,,}\cdot C_{,,,} - B_{,,,}\cdot C_{,,}) + A_{,,}\cdot(B_{,,,}\cdot C' - B'\cdot C_{,,,})\\ \qquad + A_{,,,}\cdot(B'\cdot C_{,,} - B_{,,}\cdot C')\end{array}\right\},$$

oder wieder abkürzend:

$$(\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - \mathfrak{B}'_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) = A'\cdot[A'\cdot\mathfrak{A}_{,} + (A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,})];$$

Nun ist vermöge der Relationen [74]:

$$(A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) = N\cdot(P'^2 - A'^2).$$

Substituirt man diesen Ausdruck in dem vorhergehenden, so wird sich dieser, wegen

$$\mathfrak{A}_{,} = N\cdot A',$$

endlich auf die ganz einfache Form $(N\cdot A'\cdot P'^2)$ reduciren.

Indem man so alle übrigen diesem homologen Binomien reducirt, wird man nachstehende Systeme von Relationen zum Vorschein kommen sehen:

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} - \mathfrak{B}'_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= N\cdot A'\cdot P'^2 = \mathfrak{A}_{,}\cdot P'^2;\\
(\mathfrak{C}'_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} - \mathfrak{C}'_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}) &= N\cdot B'\cdot P'^2 = \mathfrak{B}_{,}\cdot P'^2;\\
(\mathfrak{A}'_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} - \mathfrak{A}'_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}) &= N\cdot C'\cdot P'^2 = \mathfrak{C}_{,}\cdot P'^2;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [80]$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{B}''_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - \mathfrak{B}''_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= N\cdot A''\cdot P''^2 = \mathfrak{A}_{,,}\cdot P''^2;\\
(\mathfrak{C}''_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - \mathfrak{C}''_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,}) &= N\cdot B''\cdot P''^2 = \mathfrak{B}_{,,}\cdot P''^2;\\
(\mathfrak{A}''_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - \mathfrak{A}''_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,}) &= N\cdot C''\cdot P''^2 = \mathfrak{C}_{,,}\cdot P''^2;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [81]$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{B}'''_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - \mathfrak{B}'''_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= N\cdot A'''\cdot P'''^2 = \mathfrak{A}_{,,,}\cdot P'''^2;\\
(\mathfrak{C}'''_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - \mathfrak{C}'''_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,}) &= N\cdot B'''\cdot P'''^2 = \mathfrak{B}_{,,,}\cdot P'''^2;\\
(\mathfrak{A}'''_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - \mathfrak{A}'''_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,}) &= N\cdot C'''\cdot P'''^2 = \mathfrak{C}_{,,,}\cdot P'''^2;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [82]$$

20. Wenden wir itzt die nemliche Schlußfolge bei der Reducirung des Binomiums:

$$[\mathfrak{B}'''_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} - \mathfrak{B}''_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}]$$

an. Bringt man an die Stelle der Buchstaben, welche dieses Binomium zusammensetzen, die durch sie vorgestellten Ausdrücke; so wird man, nach der ersten Entwicklung finden:

$$(\mathfrak{B}'''_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} - \mathfrak{B}''_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) = \left[\begin{aligned} A_{,}\cdot(B''\cdot C''' - B'''\cdot C'') + A''\cdot(B'''C_{,} - B_{,}B''')\\ + A'''\cdot(B_{,}C'' - B''\cdot C_{,})\end{aligned}\right\} A_{,};$$

$$= A_{,}\cdot[A_{,}^2 + (A''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,})].$$

Nun ist, gemäß der Relationen [77]:

$$(A''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,}) = (V'^2 - A_{,}^2).$$

Das in Rede stehende Binomium reducirt sich also auf den sehr einfachen Ausdruck $(A_{,}\cdot V'^2)$.

Wenn auf diese Weise alle übrigen homologen Binomien behandelt werden; so werden hieraus nachstehende Systeme von Relationen entspringen:

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{B}'''_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} - \mathfrak{B}''_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) &= A_{,}\cdot V'^2;\\
(\mathfrak{C}'''_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} - \mathfrak{C}''_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) &= B_{,}\cdot V'^2;\\
(\mathfrak{A}'''_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} - \mathfrak{A}''_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,}) &= C_{,}\cdot V'^2;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [83]$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{B}'_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} - \mathfrak{B}'''_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) &= A_{,,}\cdot V''^2;\\
(\mathfrak{C}'_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} - \mathfrak{C}'''_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}) &= B_{,,}\cdot V''^2;\\
(\mathfrak{A}'_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} - \mathfrak{A}'''_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}) &= C_{,,}\cdot V''^2;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [84]$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{B}''_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} \;-\; \mathfrak{B}'_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) \;=\; A_{,,,}\cdot V^{\prime\prime 2}; \\ (\mathfrak{C}''_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} \;-\; \mathfrak{C}'_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) \;=\; B_{,,,}\cdot V^{\prime\prime 2}; \\ (\mathfrak{A}''_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} \;-\; \mathfrak{A}'_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}) \;=\; C_{,,,}\cdot V^{\prime\prime 2}; \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots [85]$$

Nachdem wir nun die vorzüglichsten Ausdrücke, welche sich in Form von Binomien darstellen, und leicht durch viele andere vermehrt werden könnten, in ihren reducirten Gestalten kennen gelernt haben; so wollen wir itzt die Reductionen solcher Ausdrücke vornehmen, welche sich als Trinomien darstellen, und deren Bestandtheile die in den Systemen [1], [2] und [11] angeführten Ausdrücke sind.

21. Die Relationen [35] liefern uns nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}''_{,} \;=\; (A'''\cdot P^{\prime\prime 2} \;-\; A''\cdot M'); \\ \mathfrak{B}''_{,} \;=\; (B'''\cdot P^{\prime\prime 2} \;-\; B''\cdot M'); \\ \mathfrak{C}''_{,} \;=\; (C'''\cdot P^{\prime\prime 2} \;-\; C''\cdot M'); \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (\alpha)$$

Durch mannigfaltige Verknüpfungen dieser drei Gleichungen mit einander lassen sich sehr merkwürdige Relationen zum Vorschein bringen.

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit A'', die zweite mit B'' und die dritte mit C'', und verbindet sie hierauf; so ergibt sich sogleich:

$$A''\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B''\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C''\cdot\mathfrak{C}''_{,} = 0.$$

Aus dieser Gleichung existiren noch fünf ähnliche, so daß man nachstehendes System erhalten wird:

$$\left.\begin{array}{l} A''\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B''\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C''\cdot\mathfrak{C}''_{,} = 0;\; A'''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + B'''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + C'''\cdot\mathfrak{C}'''_{,} = 0; \\ A'''\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} + B'''\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} + C'''\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} = 0;\; A'\cdot\mathfrak{A}'_{,,} + B'\cdot\mathfrak{B}'_{,,} + C'\cdot\mathfrak{C}'_{,,} = 0; \\ A'\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + B'\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} + C'\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} = 0;\; A''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} + B''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} + C''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} = 0; \end{array}\right\} [86]$$

Multiplicirt man eben dieselben Gleichungen (α) respective mit $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$; so hat man, wegen der Relationen [13]:

$$A_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} = 0.$$

Außer dieser Gleichung gibt es noch fünf analoge, so daß man nachstehendes System von Relationen erhalten wird:

$$\left.\begin{array}{l} A_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} = 0;\; A_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,} = 0; \\ A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,} = 0;\; A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,} = 0; \\ A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,} = 0;\; A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} = 0; \end{array}\right\} [87]$$

22. Multiplicirt man die Gleichungen (α) respective mit $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$, und addirt sie hierauf; so erhält man wegen:

$$(A''\cdot A_{,,} + B''\cdot B_{,,} + C''\cdot C_{,,}) = N$$

nachstehende Relation:

$$(A_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) = -N\cdot M'.$$

Außer dieser Gleichung gibt es noch fünf ähnliche, so daß hieraus folgendes System entspringt:

$$\left.\begin{aligned}(A_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= (A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) = -N\cdot M';\\ (A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= (A_{,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) = -N\cdot M'';\\ (A_{,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= (A_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = -N\cdot M''';\end{aligned}\right\} \quad [88]$$

Werden aber die Gleichungen (α) respective mit $A_{,,,}$ $B_{,,,}$ $C_{,,,}$ multiplicirt, und hierauf addirt; so gibt ihre Summe, wegen:

$$A_{,,,}\cdot A''' + B_{,,,}\cdot B''' + C_{,,,}\cdot C''' = N,$$

folgende Relation:

$$A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,} = N\cdot P''^2.$$

Außer dieser Relation finden noch fünf ähnliche Statt, so daß man haben wird:

$$\left.\begin{aligned}(A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= (A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) = N\cdot P'^2;\\ (A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= (A_{,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = N\cdot P''^2;\\ (A_{,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} + B_{,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} + C_{,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= (A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,}) = N\cdot P'''^2;\end{aligned}\right\} \quad [89]$$

23. Substituirt man in dem Ausdrucke:

$$[A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}]$$

für die Größen $\mathfrak{A}''_{,}$ $\mathfrak{B}''_{,}$ $\mathfrak{C}''_{,}$ ihre Ausdrücke aus den Relationen [11]; so wird sich derselbe auf folgenden reduciren:

$$[A_{,}\cdot(B''\cdot C''' - B'''\cdot C'') + B_{,}\cdot(A'''\cdot C'' - A''\cdot C''') + C_{,}\cdot(A''B''' - A'''B'')],$$

d. i.:

$$(A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) = (A_{,}^2 + B_{,}^2 + C_{,}^2) = V'^2.$$

Außer dieser Relation hat man noch fünf ähnliche, so daß man nachstehendes System von Relationen haben wird:

$$\left.\begin{aligned}(A'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} + B'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} + C'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) &= (A''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + B''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + C''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) = V'^2;\\ (A'\cdot\mathfrak{A}'''_{,,} + B'\cdot\mathfrak{B}'''_{,,} + C'\cdot\mathfrak{C}'''_{,,}) &= (A'''\cdot\mathfrak{A}'_{,,} + B'''\cdot\mathfrak{B}'_{,,} + C'''\cdot\mathfrak{C}'_{,,}) = V''^2;\\ (A''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,} + B''\cdot\mathfrak{B}'_{,,,} + C''\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}) &= (A'\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} + B'\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} + C'\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) = V'''^2;\end{aligned}\right\} \quad [90]$$

24. Bringt man in dem Ausdrucke:

$$[A''\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime} + B''\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime} + C''\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime}]$$

an die Stelle der Größen $\mathfrak{A}'_{\prime\prime}$ $\mathfrak{B}'_{\prime\prime}$ $\mathfrak{C}'_{\prime\prime}$ ihre Werthe aus den Relationen [11]; so wird man nach seiner ersten Entwicklung und Reduction finden:

$$[A_{\prime\prime}\cdot(B''\cdot C' - B'\cdot C'') + B_{\prime\prime}\cdot(C''\cdot A' - C'\cdot A'') + C_{\prime\prime}\cdot(A''\cdot B' - A'\cdot B'')],$$

d. i.:

$$-(A''\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime} + B''\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime} + C''\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime}) = (A_{\prime\prime}\cdot A_{\prime\prime\prime} + B_{\prime\prime}\cdot B_{\prime\prime\prime} + C_{\prime\prime}\cdot C_{\prime\prime\prime}) = E'.$$

Außer dieser Relation gibt es noch fünf ähnliche, welche mit jener nachstehendes System von Relationen bilden:

$$\left.\begin{array}{l}
(A''\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime} + B''\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime} + C''\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime}) = (A'''\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} + B'''\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} + C'''\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}) = -E';\\
(A'''\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime} + B'''\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime} + C'''\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}) = (A'\cdot\mathfrak{A}''_{\prime} + B'\cdot\mathfrak{B}''_{\prime} + C'\cdot\mathfrak{C}''_{\prime}) = -E'';\\
(A'\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime} + B'\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime} + C'\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime}) = (A''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime} + B''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime} + C''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}) = -E''';
\end{array}\right\}\ [91]$$

25. Setzt man in dem Ausdrucke:

$$[\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}]$$

für $\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}$ $\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}$ $\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}$ und $\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}$ $\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}$ $\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}$ ihre Entwicklungen aus den Gleichungen [36] und [37]; so wird man dafür erhalten:

$$\left\{\begin{array}{l}
(A'\cdot P'^2 - A''\cdot M''')\cdot(A'\cdot P'''^2 - A'''\cdot M'')\\
+\,(B'\cdot P'^2 - B''\cdot M''')\cdot(B'\cdot P'''^2 - B'''\cdot M'')\\
+\,(C'\cdot P'^2 - C''\cdot M''')\cdot(C'\cdot P'''^2 - C'''\cdot M'')
\end{array}\right\}$$

Wird dieser Ausdruck gehörig entwickelt, und benützt man bei seiner Reduction die Relationen [6], [3]; so wird man erhalten:

$$[P'^2\cdot P''^2\cdot P'''^2 - M'^2\cdot P'^2 - M''^2\cdot P''^2 + M'M''M''']$$

Von einer andern Seite ist dieser Ausdruck:

$$[\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}]$$

leicht auf nachstehenden zu reduciren:

$$[A'''\cdot(C_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}) + B'''\cdot(A_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime} - C_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}) + C'''\cdot(B_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime} - A_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime})],$$

oder:

$$[A''\cdot(B_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime} - C_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}) + B''\cdot(C_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime} - A_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}) + C''\cdot(A_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime} - B_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime})].$$

Jeder dieser Ausdrücke gibt endlich unter Zuziehung der Relationen [56] und [57]:

$(M'''\cdot E''' + P'^2\cdot V'^2)$, oder $(N^2 - M'\cdot E')$, oder $(M''\cdot E'' + P'''^2\cdot V'''^2)$.

Nebst diesem Trinomium gibt es noch zwei mit ihm homologe; so daß man nachstehendes System erhalten wird:

$$\left.\begin{aligned}
&[\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}+\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}+\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}]=\\
&[P'^2\cdot P''^2\cdot P'''^2-M''^2\cdot P''^2-M'''^2\cdot P'''^2+M'\cdot M''\cdot M''']=\\
&(M'''\cdot E'''+P''^2\cdot V''^2)=(N^2-M'\cdot E')=(M''\cdot E''+P'''^2\cdot V'''^2);\\
&[\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime}+\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime}+\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime}]=\\
&[P'^2\cdot P''^2\cdot P'''^2-M'^2\cdot P'^2-M'''^2\cdot P'''^2+M'\cdot M''\cdot M''']=\\
&(M'\cdot E'+P'''^2\cdot V'''^2)=(N^2-M''\cdot E'')=(M'''\cdot E'''+P'^2\cdot V'^2);\\
&[\mathfrak{A}'_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}''_{\prime}+\mathfrak{B}'_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}''_{\prime}+\mathfrak{C}'_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}''_{\prime}]=\\
&[P'^2\cdot P''^2\cdot P'''^2-M'^2\cdot P'^2-M''^2\cdot P''^2+M'\cdot M''\cdot M''']=\\
&(M''\cdot E''+P'^2\cdot V'^2)=(N^2-M'''\cdot E''')=(M'\cdot E'+P''^2\cdot V''^2).
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad[92]$$

Die Entwicklung dieser drei Ausdrücke kann inzwischen noch auf eine andere Art bewerkstelliget werden. Setzt man nemlich im Ausdrucke:

$$[\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}+\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}+\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}]$$

für $\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}$ $\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}$ $\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}$ ihre Werthe aus den Relationen [36], oder für $\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}$ $\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}$ $\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}$ ihre Werthe aus den Relationen [37]; so findet man, daß sich dieser Ausdruck im ersten Falle auf:

$$\left\{\begin{aligned}&(A'\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}+B'\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}+C'\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime})\cdot P'''^2\\-\,&(A'''\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}+B'''\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}+C'''\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime})\cdot M''\end{aligned}\right\}$$

und im andern Falle auf:

$$\left\{\begin{aligned}&(A'\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}+B'\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}+C'\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime})\cdot P''^2\\-\,&(A''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}+B''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}+C''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime})\cdot M'''\end{aligned}\right\}$$

reducire. Durch Anwendung der Relationen [90] und [91] wird aus jenem Ausdrucke:

$$(V'''^2\cdot P'''^2+E''\cdot M''),$$

und aus diesem:

$$(V''^2\cdot P''^2+E'''\cdot M''').$$

26. Setzt man in dem Ausdrucke:

$$[\mathfrak{A}'_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}+\mathfrak{B}'_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime}+\mathfrak{C}'_{\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}]$$

für die Größen $\mathfrak{A}'_{\prime\prime}$ $\mathfrak{B}'_{\prime\prime}$ $\mathfrak{C}'_{\prime\prime}$ ihre Werthe aus den Relationen [36], oder für die Größen $\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}$ $\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime}$ $\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}$ ihre Werthe aus den Relationen [37]; so reducirt er sich im ersten Falle auf:

$$\left\{\begin{aligned}&(A'''\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}+B'''\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime}+C'''\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime})\cdot P'^2\\-\,&(A'\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}+B'\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime}+C'\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime})\cdot M''\end{aligned}\right\}$$

und im zweiten Falle auf:

$$\left\{\begin{aligned}&(A''\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime}+B''\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime}+C''\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime})\cdot P'^2\\-\,&(A'\cdot\mathfrak{A}'_{\prime\prime}+B'\cdot\mathfrak{B}'_{\prime\prime}+C'\cdot\mathfrak{C}'_{\prime\prime})\cdot M''\end{aligned}\right\}$$

Durch Anwendung der Relationen [86] und [91] wird jeder dieser beiden Ausdrücke in den einfachen

$$(- E' \cdot P'^2)$$

übergehen. Auf eben dieselbe Weise lassen sich die beiden übrigen, diesem homologen, Ausdrücke reduciren, so daß man das nachstehende System von Relationen haben wird:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{A}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}) = - E' \cdot P'^2; \\ (\mathfrak{A}''_{\prime} \cdot \mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}''_{\prime} \cdot \mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}''_{\prime} \cdot \mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}) = - E'' \cdot P''^2; \\ (\mathfrak{A}'''_{\prime} \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{B}'''_{\prime} \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{C}'''_{\prime} \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime\prime}) = - E''' \cdot P'''^2; \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad [93]$$

27. Auf eben dieselbe Weise entwickelt man den Ausdruck:

$$[\mathfrak{A}''_{\prime} \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime} + \mathfrak{B}''_{\prime} \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime} + \mathfrak{C}''_{\prime} \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime}].$$

Setzt man nemlich in ihm anstatt $\mathfrak{A}''_{\prime}$ $\mathfrak{B}''_{\prime}$ $\mathfrak{C}''_{\prime}$ ihre Werthe aus den Relationen [35], oder anstatt $\mathfrak{A}'''_{\prime}$ $\mathfrak{B}'''_{\prime}$ $\mathfrak{C}'''_{\prime}$ aus eben denselben Relationen; so wird man finden, daß dieser Ausdruck im ersten Falle in:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad (A''' \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime} + B''' \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime} + C''' \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime}) \cdot P''^2 \\ - (A'' \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime} + B'' \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime} + C'' \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime}) \cdot M' \end{array}\right\},$$

und im zweiten Falle in:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad (A'' \cdot \mathfrak{A}''_{\prime} + B'' \cdot \mathfrak{B}''_{\prime} + C'' \cdot \mathfrak{C}''_{\prime}) \cdot P'''^2 \\ - (A''' \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime} + B''' \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime} + C''' \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime}) \cdot M' \end{array}\right\},$$

übergehe.

Mit Hilfe der Relationen [86] und [90] erhält man endlich aus jedem dieser beiden Ausdrücke den einfachen Ausdruck: $(- V'^2 \cdot M')$.

Da die beiden andern homologen Ausdrücke ähnliche Resultate geben; so wird man nachstehendes System von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{A}''_{\prime} \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime} + \mathfrak{B}''_{\prime} \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime} + \mathfrak{C}''_{\prime} \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime}) = - V'^2 \cdot M'; \\ (\mathfrak{A}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{B}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'''_{\prime\prime} + \mathfrak{C}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'''_{\prime\prime}) = - M'' \cdot V''^2; \\ (\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}) = - V'''^2 \cdot M'''; \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad [94]$$

28. Die Ausdrücke in den Relationen [93] und [94] lassen noch eine andere Transformation zu, die darin besteht, daß man an die Stelle aller sich darin befindlichen Größen ihre Ausdrücke aus den Relationen [35], [36] und [37] setzt. So z. B. ist

$$[\mathfrak{A}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}] =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad (A'' \cdot P'^2 - A' \cdot M''') \cdot (A''' \cdot P'^2 - A' \cdot M'') \\ + (B'' \cdot P'^2 - B' \cdot M''') \cdot (B''' \cdot P'^2 - B' \cdot M'') \\ + (C'' \cdot P'^2 - C' \cdot M''') \cdot (C''' \cdot P'^2 - C' \cdot M'') \end{array}\right\}$$

und:

$$[\mathfrak{A}''_{,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,} + \mathfrak{B}''_{,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,} + \mathfrak{C}''_{,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,}] =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A''' \cdot P'^2 - A'' \cdot M') \cdot (A'' \cdot P''^2 - A''' \cdot M') \\ + (B''' \cdot P'^2 - B'' \cdot M') \cdot (B'' \cdot P''^2 - B''' \cdot M') \\ + (C''' \cdot P'^2 - C'' \cdot M') \cdot (C'' \cdot P''^2 - C''' \cdot M') \end{array} \right\}$$

Jener Ausdruck reducirt sich auf:

$$- P'^2 \cdot (M'' \cdot M''' - M' \cdot P'^2);$$

und dieser auf:

$$- M' \cdot (P''^2 \cdot P'''^2 - M'^2);$$

so daß man neuerdings noch folgende Relationen erhalten wird:

$$\left. \begin{array}{l} (\mathfrak{A}'_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} + \mathfrak{B}'_{,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,,} + \mathfrak{C}'_{,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,,}) = - P'^2 \cdot (M'' \cdot M''' - M' \cdot P'^2); \\ (\mathfrak{A}''_{,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} + \mathfrak{B}''_{,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} + \mathfrak{C}''_{,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,}) = - P''^2 \cdot (M' \cdot M''' - M'' \cdot P''^2); \\ (\mathfrak{A}'''_{,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} + \mathfrak{B}'''_{,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} + \mathfrak{C}'''_{,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) = - P'''^2 \cdot (M' \cdot M'' - M''' \cdot P'''^2); \end{array} \right\} [95]$$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathfrak{A}''_{,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,} + \mathfrak{B}''_{,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,} + \mathfrak{C}''_{,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,}) = - M' \cdot (P''^2 \cdot P'''^2 - M'^2); \\ (\mathfrak{A}'_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} + \mathfrak{B}'_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} + \mathfrak{C}'_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) = - M' \cdot (P'^2 \cdot P'''^2 - M''^2); \\ (\mathfrak{A}'_{,,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} + \mathfrak{B}'_{,,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} + \mathfrak{C}'_{,,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,}) = - M' \cdot (P'^2 \cdot P''^2 - M'''^2); \end{array} \right\} [96]$$

29. Wenn man in dem Trinomium:

$$[\mathfrak{A}'''_{,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,} + \mathfrak{B}'''_{,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,} + \mathfrak{C}'''_{,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,}]$$

entweder an die Stelle der Größen $\mathfrak{A}'_{,,}$ $\mathfrak{B}'_{,,}$ $\mathfrak{C}'_{,,}$ ihre Werthe aus den Relationen [36], oder anstatt der Größen $\mathfrak{A}'''_{,}$ $\mathfrak{B}'''_{,}$ $\mathfrak{C}'''_{,}$ ihre Werthe aus den Relationen [35] substituirt; so findet man, daß es sich im ersten Falle auf den Ausdruck:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A''' \cdot \mathfrak{A}'''_{,} + B''' \cdot \mathfrak{B}'''_{,} + C''' \cdot \mathfrak{C}'''_{,}) \cdot P'^2 \\ - (A' \cdot \mathfrak{A}'''_{,} + B' \cdot \mathfrak{B}'''_{,} + C' \cdot \mathfrak{C}'''_{,}) \cdot M'' \end{array} \right\}$$

und im andern Falle auf den Ausdruck:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A'' \cdot \mathfrak{A}'_{,,} + B'' \cdot \mathfrak{B}'_{,,} + C'' \cdot \mathfrak{C}'_{,,}) \cdot P''^2 \\ - (A''' \cdot \mathfrak{A}'_{,,} + B''' \cdot \mathfrak{B}'_{,,} + C''' \cdot \mathfrak{C}'_{,,,}) \cdot M' \end{array} \right\}$$

reducire.

Jener Ausdruck wird, mit Hilfe der Relationen [86] und [91]; und dieser mit Hilfe der Relationen die äquivalenten Ausdrücke:

$$+ (M'' \cdot E''')$$

$$- (E' \cdot P'''^2 + V''^2 \cdot M')$$

geben.

Außer dem behandelten Trinomium gibt es noch fünf andere ihm homologe, welche ähnliche Reductionen, als dieses, verstatten. Hieraus entspringen also die Relationen des nachstehenden Systemes:

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}^{\prime\prime\prime}_{,}\cdot\mathfrak{A}^{\prime}_{,,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime\prime}_{,}\cdot\mathfrak{B}^{\prime}_{,,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime\prime}_{,}\cdot\mathfrak{C}^{\prime}_{,,}) = M^{\prime\prime}\cdot E^{\prime\prime\prime} = -(E^{\prime}\cdot P^{\prime\prime 2} + V^{\prime 2}\cdot M^{\prime});\\
(\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,}\cdot\mathfrak{A}^{\prime}_{,,,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,}\cdot\mathfrak{B}^{\prime}_{,,,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,}\cdot\mathfrak{C}^{\prime}_{,,,}) = M^{\prime\prime\prime}\cdot E^{\prime\prime} = -(E^{\prime}\cdot P^{\prime 2} + V^{\prime\prime\prime 2}\cdot M^{\prime});\\
(\mathfrak{A}^{\prime\prime\prime}_{,,}\cdot\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime\prime}_{,,}\cdot\mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime\prime}_{,,}\cdot\mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,}) = M^{\prime}\cdot E^{\prime\prime\prime} = -(E^{\prime\prime}\cdot P^{\prime\prime\prime 2} + V^{\prime 2}\cdot M^{\prime\prime});\\
(\mathfrak{A}^{\prime}_{,,}\cdot\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,,,} + \mathfrak{B}^{\prime}_{,,}\cdot\mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,,,} + \mathfrak{C}^{\prime}_{,,}\cdot\mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,,,}) = M^{\prime\prime\prime}\cdot E^{\prime} = -(E^{\prime\prime}\cdot P^{\prime 2} + V^{\prime\prime\prime 2}\cdot M^{\prime\prime});\\
(\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,,,}\cdot\mathfrak{A}^{\prime\prime\prime}_{,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,,,}\cdot\mathfrak{B}^{\prime\prime\prime}_{,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,,,}\cdot\mathfrak{C}^{\prime\prime\prime}_{,}) = M^{\prime}\cdot E^{\prime\prime} = -(E^{\prime\prime\prime}\cdot P^{\prime\prime\prime 2} + V^{\prime 2}\cdot M^{\prime\prime\prime});\\
(\mathfrak{A}^{\prime}_{,,,}\cdot\mathfrak{A}^{\prime\prime\prime}_{,,} + \mathfrak{B}^{\prime}_{,,,}\cdot\mathfrak{B}^{\prime\prime\prime}_{,,} + \mathfrak{C}^{\prime}_{,,,}\cdot\mathfrak{C}^{\prime\prime\prime}_{,,}) = M^{\prime\prime}\cdot E^{\prime} = -(E^{\prime\prime\prime}\cdot P^{\prime 2} + V^{\prime\prime 2}\cdot M^{\prime\prime\prime});
\end{array}\right\} \quad [97]$$

30. Wenn man die Gleichungen (α) respective mit

$$\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,} \quad \mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,} \quad \mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,}$$

multiplicirt, und hierauf in eine Summe bringt; so hat man:

$$[\mathfrak{A}^{\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime 2}_{,}] =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(A^{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,} + B^{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,} + C^{\prime\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,})\cdot P^{\prime\prime 2}\\
-(A^{\prime\prime}\cdot\mathfrak{A}^{\prime\prime}_{,} + B^{\prime\prime}\cdot\mathfrak{B}^{\prime\prime}_{,} + C^{\prime\prime}\cdot\mathfrak{C}^{\prime\prime}_{,})\cdot M^{\prime}
\end{array}\right\};$$

Dieser Ausdruck gibt, durch Anwendung der Relationen [86] und [90], unmittelbar den einfachen Ausdruck: $(V^{\prime 2}\cdot P^{\prime\prime 2})$.

Da außer diesem Trinomium noch fünf ähnliche existiren, welche dieselbe Reduction zulassen; so wird man nachstehendes System von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}^{\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime 2}_{,}) = P^{\prime\prime 2}\cdot V^{\prime 2};\\
(\mathfrak{A}^{\prime\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime\prime 2}_{,}) = P^{\prime\prime\prime 2}\cdot V^{\prime 2};\\
(\mathfrak{A}^{\prime 2}_{,,} + \mathfrak{B}^{\prime 2}_{,,} + \mathfrak{C}^{\prime 2}_{,,}) = P^{\prime 2}\cdot V^{\prime\prime 2};\\
(\mathfrak{A}^{\prime\prime\prime 2}_{,,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime\prime 2}_{,,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime\prime 2}_{,,}) = P^{\prime\prime 2}\cdot V^{\prime\prime 2};\\
(\mathfrak{A}^{\prime 2}_{,,,} + \mathfrak{B}^{\prime 2}_{,,,} + \mathfrak{C}^{\prime 2}_{,,,}) = P^{\prime 2}\cdot V^{\prime\prime\prime 2};\\
(\mathfrak{A}^{\prime\prime 2}_{,,,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime 2}_{,,,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime 2}_{,,,}) = P^{\prime\prime 2}\cdot V^{\prime\prime\prime 2};
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [98]$$

Erhebt man jede der Gleichungen (α) aufs Quadrat, und verbindet sie; so wird man für den Ausdruck:

$$[\mathfrak{A}^{\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{B}^{\prime\prime 2}_{,} + \mathfrak{C}^{\prime\prime 2}_{,}]$$

noch folgenden erhalten:

$$[(A^{\prime\prime\prime}\cdot P^{\prime\prime 2} - A^{\prime\prime}\cdot M^{\prime})^2 + (B^{\prime\prime\prime}\cdot P^{\prime\prime 2} - B^{\prime\prime}\cdot M^{\prime})^2 + (C^{\prime\prime\prime}\cdot P^{\prime\prime 2} - C^{\prime\prime}\cdot M^{\prime})^2],$$

welcher, nach gehöriger Reduction, in den Ausdruck:

$$P^{\prime\prime 2}\,(P^{\prime\prime 2}\cdot P^{\prime\prime\prime 2} - M^{\prime 2})$$

übergeht.

Die übrigen Ausdrücke, eben so reducirt, bilden also mit diesem hier das nachstehende System von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime 2} + \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime 2} + \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime 2}) = P^{\prime\prime 2} \cdot (P^{\prime\prime 2} \cdot P^{\prime\prime\prime 2} - M^{\prime 2});\\
(\mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime\prime 2} + \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime\prime 2} + \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime\prime 2}) = P^{\prime\prime\prime 2} \cdot (P^{\prime\prime 2} \cdot P^{\prime\prime\prime 2} - M^{\prime 2});\\
(\mathfrak{A}_{,,}^{\prime 2} + \mathfrak{B}_{,,}^{\prime 2} + \mathfrak{C}_{,,}^{\prime 2}) = P^{\prime 2} \cdot (P^{\prime 2} \cdot P^{\prime\prime\prime 2} - M^{\prime\prime 2});\\
(\mathfrak{A}_{,,}^{\prime\prime\prime 2} + \mathfrak{B}_{,,}^{\prime\prime\prime 2} + \mathfrak{C}_{,,}^{\prime\prime\prime 2}) = P^{\prime\prime\prime 2} \cdot (P^{\prime 2} \cdot P^{\prime\prime\prime 2} - M^{\prime\prime 2});\\
(\mathfrak{A}_{,,,}^{\prime 2} + \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime 2} + \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime 2}) = P^{\prime 2} \cdot (P^{\prime 2} \cdot P^{\prime\prime 2} - M^{\prime\prime\prime 2});\\
(\mathfrak{A}_{,,,}^{\prime\prime 2} + \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime\prime 2} + \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime\prime 2}) = P^{\prime\prime 2} \cdot (P^{\prime 2} \cdot P^{\prime\prime 2} - M^{\prime\prime\prime 2});
\end{array}\right\} \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \quad [99]$$

31. Aus den Relationen [86], [90] und [91] wird man, wenn man sie mit N multiplicirt, und wenn man bemerkt, daß

$$N \cdot A' = \mathfrak{A}_{,}; \quad N \cdot B' = \mathfrak{B}_{,}; \quad N \cdot C' = \mathfrak{C}_{,}; \text{ u. s. w.}$$

noch einige neue herleiten können, die ich größerer Vollständigkeit halber hier noch aufnehmen werde.

Die Relationen [86] geben also zuerst:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{A}_{,,} \cdot \mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime} = 0; \quad \mathfrak{A}_{,,,} \cdot \mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,,} \cdot \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,,} \cdot \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime\prime} = 0;\\
\mathfrak{A}_{,,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,}^{\prime\prime\prime} = 0; \quad \mathfrak{A}_{,} \cdot \mathfrak{A}_{,,}^{\prime} + \mathfrak{B}_{,} \cdot \mathfrak{B}_{,,}^{\prime} + \mathfrak{C}_{,} \cdot \mathfrak{C}_{,,}^{\prime} = 0;\\
\mathfrak{A}_{,} \cdot \mathfrak{A}_{,,,}^{\prime} + \mathfrak{B}_{,} \cdot \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime} + \mathfrak{C}_{,} \cdot \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime} = 0; \quad \mathfrak{A}_{,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,,}^{\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime\prime} = 0;
\end{array}\right\} \quad [100]$$

Die Relationen [90] werden geben:

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}_{,,,} \cdot \mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,,} \cdot \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,,} \cdot \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime}) = (\mathfrak{A}_{,,} \cdot \mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime\prime}) = V^{\prime 2} N;\\
(\mathfrak{A}_{,} \cdot \mathfrak{A}_{,,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,} \cdot \mathfrak{B}_{,,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,} \cdot \mathfrak{C}_{,,}^{\prime\prime\prime}) = (\mathfrak{A}_{,,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,}^{\prime} + \mathfrak{B}_{,,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,}^{\prime} + \mathfrak{C}_{,,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,}^{\prime}) = V^{\prime\prime 2} N;\\
(\mathfrak{A}_{,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,,}^{\prime} + \mathfrak{B}_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime} + \mathfrak{C}_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime}) = (\mathfrak{A}_{,} \cdot \mathfrak{A}_{,,,}^{\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,} \cdot \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,} \cdot \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime\prime}) = V^{\prime\prime\prime 2} N;
\end{array}\right\} \quad [101]$$

Die Relationen [91] geben endlich:

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}_{,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,}^{\prime} + \mathfrak{B}_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,}^{\prime} + \mathfrak{C}_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,}^{\prime}) = (\mathfrak{A}_{,,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,,}^{\prime} + \mathfrak{B}_{,,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime} + \mathfrak{C}_{,,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime}) = - E^{\prime} N;\\
(\mathfrak{A}_{,,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,,}^{\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,,}^{\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,,}^{\prime\prime}) = (\mathfrak{A}_{,} \cdot \mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,} \cdot \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,} \cdot \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime}) = - E^{\prime\prime} N;\\
(\mathfrak{A}_{,} \cdot \mathfrak{A}_{,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,} \cdot \mathfrak{B}_{,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,} \cdot \mathfrak{C}_{,}^{\prime\prime\prime}) = (\mathfrak{A}_{,,} \cdot \mathfrak{A}_{,,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{B}_{,,} \cdot \mathfrak{B}_{,,}^{\prime\prime\prime} + \mathfrak{C}_{,,} \cdot \mathfrak{C}_{,,}^{\prime\prime\prime}) = - E^{\prime\prime\prime} N;
\end{array}\right\} \quad [102]$$

32. Wir haben nun die vorzüglichsten Ausdrücke, welche aus den in den Systemen [1], [2] und [11] enthaltenen Größen zusammengesetzt sind, und welche sich theils als Binomien, theils als Trinomien darstellen, entwickelt, und es sind uns in diesen Untersuchungen sehr merkwürdige Beziehungen zwischen diesen Größen bekannt geworden. Hier glaube ich bemerken zu müssen, daß alle in den Systemen:

[86] . . . . [102]

enthaltenen Gleichungen auch unmittelbar aus den Gleichungen, welche in den Systemen

[44] . . . . [85]

enthalten sind, hervorgehen; und ich will hier um so mehr diese Methode erklären, da sie in Hinsicht der Gleichförmigkeit und Leichtigkeit vor den übrigen Verfahrungsarten, durch welche wir so merkwürdige Resultate gewonnen haben, den Vorzug verdient. Sie besteht nun hauptsächlich darin, daß man die drei in einem der Systeme [44] · · · [85] enthaltenen Gleichungen, nachdem man sie respective entweder mit A' B' C', oder A'' B'' C'', oder A''' B''' C''', oder mit $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$, oder $A_{,,}$ $B_{,,}$ $C_{,,}$, oder $A_{,,,}$ $B_{,,,}$ $C_{,,,}$ multiplicirt hat, in einer einzigen Gleichung verbindet 2c., und je zwei der Glieder dieser Gleichung, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, vereinigt; bei welchem Geschäfte immer eine von den Formen entgegentritt, welche wir in den Systemen [86] · · · [102] aufgezählt haben.

Wir wollen also diese Binomien in derselben Ordnung, in welcher wir sie oben auf einander folgen ließen, wieder vornehmen, um aus ihnen die Ausdrücke, welche sich uns als Trinomien darstellen, herzuleiten.

33. Aus den Relationen:

[44], [45], [46]

können die Systeme:

[87], [88], [94] und [97]

abgeleitet werden.

Werden die drei Gleichungen des Systemes [44] respective mit A', B', C' multiplicirt und addirt, was wir kurz durch

$$[A' \cdot 1 + B' \cdot 2 + C' \cdot 3]$$

andeuten wollen; so erhält man:

$$[A' \cdot (B''' \cdot \mathfrak{C}_{,}'' - C''' \cdot \mathfrak{B}_{,}'') + B' \cdot (C''' \cdot \mathfrak{A}_{,}'' - A''' \cdot \mathfrak{C}_{,}'') + C' \cdot (A''' \cdot \mathfrak{B}_{,}'' - B''' \cdot \mathfrak{A}_{,}'')] =$$
$$[A' \cdot (C'' \cdot \mathfrak{B}_{,}''' - B'' \cdot \mathfrak{C}_{,}''') + B' \cdot (A'' \cdot \mathfrak{C}_{,}''' - C'' \cdot \mathfrak{A}_{,}''') + C' \cdot (B'' \cdot \mathfrak{A}_{,}''' - A'' \cdot \mathfrak{B}_{,}''')]$$
$$= (N \cdot M').$$

Schreibt man diese beiden Ausdrücke unter den Formen:

$$[\mathfrak{A}_{,}'' \cdot (B' \cdot C''' - B''' \cdot C') + \mathfrak{B}_{,}'' \cdot (A''' \cdot C' - A' \cdot C''') + \mathfrak{C}_{,}'' \cdot (A' \cdot B''' - A''' \cdot B')] =$$
$$[\mathfrak{A}_{,}''' \cdot (B'' \cdot C' - B' \cdot C'') + \mathfrak{B}_{,}''' \cdot (A' \cdot C'' - A'' \cdot C') + \mathfrak{C}_{,}''' \cdot (A'' \cdot B' - A' \cdot B'')];$$

und setzt wieder an die Stelle der Binomien die Abkürzungen des Systemes [1]; so kömmt unmittelbar die erste der Relationen [88] zum Vorschein.

Auf gleiche Weise erhält man die beiden andern Gleichungen des Systemes [88], wenn man die Gleichungen des Systemes [45] mit den Größen A'' B'' C'', und die Gleichungen des Systemes [46] mit A''' B''' C''' respective multiplicirt.

Die Gleichung:

$$[A''\cdot 1 + B''\cdot 2 + C''\cdot 3]$$

aus dem Systeme [44] gibt uns:

$$[A''\cdot(B'''\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C'''\cdot\mathfrak{B}''_{,}) + B''\cdot(C'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) + C''\cdot(A'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B'''\cdot\mathfrak{A}''_{,})] =$$
$$[A''\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) + B''\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C''\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) + C''\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A''\cdot\mathfrak{B}'''_{,})]$$
$$= 0.$$

Bringt man den ersten dieser Ausdrücke unter die Form:

$$[\mathfrak{A}''_{,}\cdot(B''\cdot C''' - B'''\cdot C'') + \mathfrak{B}''_{,}\cdot(A'''\cdot C'' - A''\cdot C''') + \mathfrak{C}''_{,}\cdot(A''\cdot B''' - A'''\cdot B'')];$$

und schreibt für die Binomien die einfachen Buchstaben, welche sie gemäß der Relationen [1] bedeuten; so tritt die erste der Relationen [87] hervor.

Die Gleichung:

$$[A'''\cdot 1 + B'''\cdot 2 + C'''\cdot 3]$$

aus dem Systeme [44] gibt ferner:

$$[A'''\cdot(B'''\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C'''\cdot\mathfrak{B}''_{,}) + B'''\cdot(C'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) + C'''\cdot(A'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B'''\cdot\mathfrak{A}''_{,})] =$$
$$[A'''\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) + B'''\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C''\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) + C'''\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A''\cdot\mathfrak{B}'''_{,})]$$
$$= 0.$$

Bringt man die zweite dieser Gleichungen unter die Form:

$$[\mathfrak{A}'''_{,}\cdot(B''\cdot C''' - B'''\cdot C'') + \mathfrak{B}'''_{,}\cdot(A'''\cdot C'' - A''\cdot C''') + \mathfrak{C}'''_{,}\cdot(A''\cdot B''' - A'''\cdot B'')] = 0;$$

und setzt anstatt der Binomien die Abkürzungen aus den Relationen [1]; so stellt sich alsogleich die andere der Gleichungen [87] dar.

Die Gleichung:

$$[A_{,}\cdot 1 + B_{,}\cdot 2 + C_{,}\cdot 3]$$

im Systeme [44] gibt:

$$[A_{,}\cdot(B'''\cdot\mathfrak{C}''_{,} - C'''\cdot\mathfrak{B}''_{,}) + B_{,}\cdot(C'''\cdot\mathfrak{A}''_{,} - A'''\cdot\mathfrak{C}''_{,}) + C_{,}\cdot(A'''\cdot\mathfrak{B}''_{,} - B'''\cdot\mathfrak{A}''_{,})] =$$
$$[A_{,}\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{,} - B''\cdot\mathfrak{C}'''_{,}) + B_{,}\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'''_{,} - C''\cdot\mathfrak{A}'''_{,}) + C_{,}\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'''_{,} - A''\cdot\mathfrak{B}'''_{,})]$$
$$= V'^2\cdot M'.$$

Schreibt man diese beiden Ausdrücke in folgender Gestalt an:

$$[\mathfrak{A}''_{,}\cdot(C'''\cdot B_{,} - C_{,}\cdot B''') + \mathfrak{B}''_{,}\cdot(C_{,}\cdot A''' - A_{,}\cdot C''') + \mathfrak{C}''_{,}\cdot(A_{,}\cdot B''' - A'''\cdot B_{,})] =$$
$$[\mathfrak{A}'''_{,}\cdot(B''\cdot C_{,} - B_{,}\cdot C'') + \mathfrak{B}'''_{,}\cdot(A_{,}\cdot C'' - A''\cdot C_{,}) + \mathfrak{C}'''_{,}\cdot(B_{,}\cdot A'' - B''\cdot A_{,})];$$

so reducirt sich jede dieser Relationen, wenn man an die Stelle der Binomien ihre Abkürzungen aus den Relationen [11] bringt, auf die erste der Gleichungen des Systemes [94].

Die Gleichung

$$[A_{,,} \cdot 1 + B_{,,} \cdot 2 + C_{,,} \cdot 3]$$

im Systeme [44] gibt:

$$[A_{,,} \cdot (B''' \cdot \mathfrak{C}''_{,} - C''' \cdot \mathfrak{B}''_{,}) + B_{,,} \cdot (C''' \cdot \mathfrak{A}''_{,} - A''' \cdot \mathfrak{C}''_{,}) + C_{,,} \cdot (A''' \cdot \mathfrak{B}''_{,} - B''' \cdot \mathfrak{A}''_{,})] =$$
$$[A_{,,} \cdot (C'' \cdot \mathfrak{B}'''_{,} - B'' \cdot \mathfrak{C}'''_{,}) + B_{,,} \cdot (A'' \cdot \mathfrak{C}'''_{,} - C'' \cdot \mathfrak{A}'''_{,}) + C_{,,} \cdot (B'' \cdot \mathfrak{A}'''_{,} - A'' \cdot \mathfrak{B}'''_{,})]$$
$$= E''' \cdot M'.$$

Bringt man den ersten dieser Ausdrücke auf die Form:

$$[\mathfrak{A}''_{,} \cdot (B_{,,} \cdot C''' - B_{,,,} \cdot C'') + \mathfrak{B}''_{,} \cdot (C_{,,} \cdot A''' - C_{,,,} \cdot A'') + \mathfrak{C}''_{,} \cdot (A_{,,} \cdot B''' - A_{,,,} \cdot B'')],$$

und schreibt anstatt der Binomien die üblichen Abkürzungen des Systemes [11]; so kömmt alsogleich die dritte der Relationen [97] zum Vorschein. Eine ähnliche Behandlung der Gleichung:

$$[A_{,,,} \cdot 1 + B_{,,,} \cdot 2 + C_{,,,} \cdot 3]$$

gibt uns die fünfte der Relationen [97].

34. Aus den Relationen [47], [48], [49] können die Systeme:

[93], [97], [100], [102]

abgeleitet werden.

Die Gleichung:

$$[A' \cdot 1 + B' \cdot 2 + C' \cdot 3]$$

im Systeme [47] wird geben:

$$[A' \cdot (B_{,,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,} - C_{,,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,}) + B' \cdot (C_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,} - A_{,,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,}) + C' \cdot (A_{,,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,} - B_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,})] =$$
$$[A' \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,,}) + B' \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,}) + C' \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,,})]$$
$$= P'^2 \cdot E';$$

Reducirt man diese beiden Ausdrücke auf die Form:

$$[\mathfrak{A}'_{,,} \cdot (B' \cdot C_{,,,} - B_{,,,} \cdot C') + \mathfrak{B}'_{,,} \cdot (C' \cdot A_{,,,} - C_{,,,} \cdot A') + \mathfrak{C}'_{,,} \cdot (A' \cdot B_{,,,} - A_{,,,} \cdot B')] =$$
$$[\mathfrak{A}'_{,,,} \cdot (C' \cdot B_{,,} - C_{,,} \cdot B') + \mathfrak{B}'_{,,,} \cdot (A' \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C') + \mathfrak{C}'_{,,,} \cdot (B' \cdot A_{,,} - B_{,,} \cdot A')];$$

und setzt an die Stelle der Binomien ihre Abkürzungen aus dem Systeme [11]; so stellet sich sogleich die erste der Relationen [93] dar.

Reducirt man die Gleichung:

$$[A'' \cdot 1 + B'' \cdot 2 + C'' \cdot 3],$$

welche uns im Systeme [47] gibt:

$$[A'' \cdot (B_{,,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,} - C_{,,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,}) + B'' \cdot (C_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,} - A_{,,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,}) + C'' \cdot (A_{,,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,} - B_{,,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,})] =$$
$$[A'' \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,,}) + B'' \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}'_{,,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,}) + C'' \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}'_{,,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}'_{,,,})]$$
$$= M''' \cdot E';$$

auf die Form:

$$[\mathfrak{A}'_{,,}\cdot(B''\cdot C_{,,,}-C''\cdot B_{,,,})+\mathfrak{B}'_{,,}\cdot(C''\cdot A_{,,,}-A''\cdot C_{,,,})+\mathfrak{C}'_{,,}\cdot(A''\cdot B_{,,,}-B''\cdot A_{,,,})]=M'''E';$$

so wird, wenn man an die Stelle der Binomien ihre Abkürzungen aus den Relationen [11] bringt, die vierte der Gleichungen [97] aus ihr hervorgehen.

Wenn man die Gleichung:

$$[A'''\cdot 1+B'''\cdot 2+C'''\cdot 3]$$

welche im Systeme [47] gibt:

$$[A'''\cdot(B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}-C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,})+B'''\cdot(C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}-A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,})+C'''\cdot(A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}-B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,})]=$$
$$[A'''\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})+B'''\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,})+C'''\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,})]$$
$$=M''\cdot E',$$

auf die Form reducirt:

$$[\mathfrak{A}'_{,,,}\cdot(C'''\cdot B_{,,}-B'''\cdot C_{,,})+\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot(A'''\cdot C_{,,}-C'''\cdot A_{,,})+\mathfrak{C}'_{,,,}\cdot(B'''\cdot A_{,,}-A'''\cdot B_{,,})]=$$
$$M''\cdot E';$$

und man schreibt an die Stelle der Binomien die Abkürzungen aus [11]; so erhält man die sechste der Relationen [97].

Wird die Gleichung:

$$[A_{,}\cdot 1+B_{,}\cdot 2+C_{,}\cdot 3],$$

welche im Systeme [47] gibt:

$$[A_{,}\cdot(B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}-C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,})+B_{,}\cdot(C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}-A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,})+C_{,}\cdot(A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}-B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,})]=$$
$$[A_{,}\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})+B_{,}\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,})+C_{,}\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,})]$$
$$=N\cdot E',$$

auf die Form:

$$[\mathfrak{A}'_{,,}\cdot(B_{,}\cdot C_{,,,}-B_{,,,}\cdot C_{,})+\mathfrak{B}'_{,,}\cdot(C_{,}\cdot A_{,,,}-C_{,,,}\cdot A_{,})+\mathfrak{C}'_{,,}\cdot(A_{,}\cdot B_{,,,}-A_{,,,}\cdot B_{,})]=$$
$$[\mathfrak{A}'_{,,,}\cdot(B_{,,}\cdot C_{,}-B_{,}\cdot C_{,,})+\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot(A_{,}\cdot C_{,,}-A_{,,}\cdot C_{,})+\mathfrak{C}'_{,,,}\cdot(B_{,}\cdot A_{,,}-A_{,,}\cdot B_{,})]$$
$$=N\cdot E',$$

reducirt; so treten alsogleich die beiden ersten Relationen des Systemes [102] hervor.

Wenn man die Gleichung:

$$[A_{,,}\cdot 1+B_{,,}\cdot 2+C_{,,}\cdot 3],$$

welche im Systeme [47] geben wird:

$$[A_{,,}\cdot(B_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}-C_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,})+B_{,,}\cdot(C_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}-A_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,})+C_{,,}\cdot(A_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}-B_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,})]=$$
$$[A_{,,}\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})+B_{,,}\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,})+C_{,,}\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,})]$$
$$=0,$$

unter nachstehender Gestalt schreibt:

$$[\mathfrak{A}'_{,,}\cdot(B_{,,}\cdot C_{,,,}-C_{,,}\cdot B_{,,,})+\mathfrak{B}'_{,,}\cdot(C_{,,}\cdot A_{,,,}-A_{,,}\cdot C_{,,,})+\mathfrak{C}'_{,,}\cdot(A_{,,}\cdot B_{,,,}-B_{,,}\cdot A_{,,,})]=0;$$

und man setzt für die Binomien die üblichen Abkürzungen aus dem Systeme [2]; so erhält man die vierte der Relationen [100].

Eben so gibt die Entwicklung der Gleichung:

$$[A_{,,,}\cdot 1+B_{,,,}\cdot 2+C_{,,,}\cdot 3]$$

die fünfte der Gleichungen [100].

35. Aus den Relationen:

$$[56]\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ [61]$$

können die Relationen:

$$[92],\ [97],\ [101],\ [102],$$

abgeleitet werden.

Die Gleichung:

$$[A'\cdot 1+B'\cdot 2+C'\cdot 3]$$

im Systeme [56] gibt uns:

$$[A'\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,})+B'\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,})+C'\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,})]=$$
$$=-M'''\cdot E'=(P'^2\cdot E''+M''\cdot V'''^2).$$

Schreibt man sie unter der Form:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,}\cdot(C'\cdot B_{,,}-B'\cdot C_{,,})+\mathfrak{B}''_{,,,}\cdot(A'\cdot C_{,,}-C'\cdot A_{,,})+\mathfrak{C}''_{,,,}\cdot(B'\cdot A_{,,}-B_{,,}\cdot A')]=$$
$$=-M'''\cdot E'=(P'^2\cdot E''+M''\cdot V'''^2);$$

und setzt an die Stelle der Binomien die Abkürzungen aus [11]; so wird man die vierte der Relationen [97] erhalten.

Die Gleichung:

$$[A''\cdot 1+B''\cdot 2+C''\cdot 3]$$

im Systeme [56] wird geben:

$$[A''\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,})+B''\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,})+C''\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{B}''_{,,,})]=$$
$$=-P''^2\cdot E'=(M'''\cdot E''+M'\cdot V'''^2);$$

Bringt man sie unter die Gestalt:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,}\cdot(B_{,,}\cdot C''-B''\cdot C_{,,})+\mathfrak{B}''_{,,,}\cdot(A''\cdot C_{,,}-A_{,,}\cdot C'')+\mathfrak{C}''_{,,,}\cdot(B''\cdot A_{,,}-A''\cdot B_{,,})]=$$
$$=-P''^2\cdot E'=(M'''\cdot E''+M'\cdot V'''^2),$$

und setzt an die Stelle der Binomien ihre Ausdrücke aus den Relationen [42]; so reducirt sie sich mit Hilfe der bereits gefundenen auf eine identische.

Die Gleichung:

$$[A''' \cdot 1 + B''' \cdot 2 + C''' \cdot 3]$$

im Systeme [56] gibt:

$$[A''' \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,}) + B'''(A_{,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,}) + C''' \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,})] =$$
$$(N^2 - M' \cdot E') = (M'' \cdot E'' + P'''^2 \cdot V'''^2).$$

Schreibt man sie unter der Gestalt:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,} \cdot (B_{,,} \cdot C''' - B''' \cdot C_{,,}) + \mathfrak{B}''_{,,,} \cdot (A''' \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C''') + \mathfrak{C}''_{,,,} \cdot (A_{,,} \cdot B''' - A''' \cdot B_{,,})] =$$
$$(N^2 - M' \cdot E') = (M'' \cdot E'' + P'''^2 \cdot V'''^2);$$

und setzt an die Stelle der Binomien die üblichen Abkürzungen; so bekömmt man die erste der Relationen [92].

Die Gleichung:

$$[A_{,} \cdot 1 + B_{,} \cdot 2 + C_{,} \cdot 3]$$

im Systeme [56] wird geben:

$$[A_{,} \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,}) + B_{,} \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,}) + C_{,} \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,})]$$
$$= N \cdot E''.$$

Bringt man sie unter die Form:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,} \cdot (C_{,} B_{,,} - C_{,,} B_{,}) + \mathfrak{B}''_{,,,} \cdot (A_{,} \cdot C_{,,} - A_{,,} C_{,}) + \mathfrak{C}''_{,,,} \cdot (B_{,} \cdot A_{,,} - B_{,,} A_{,})] = NE'';$$

und schreibt für die Binomien die üblichen Abkürzungen aus [2]; so zeigt sich alsogleich die dritte der Relationen [102].

Die Gleichung:

$$[A_{,,,} \cdot 1 + B_{,,,} \cdot 2 + C_{,,,} \cdot 3]$$

im Systeme [56] gibt:

$$[A_{,,,} \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,}) + B_{,,,} \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}''_{,,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,}) + C_{,,,} \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}''_{,,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}''_{,,,})]$$
$$= N \cdot V'''^2;$$

und diese Gleichung wird, unter die Gestalt:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,} \cdot (B_{,,} \cdot C_{,,,} - B_{,,,} \cdot C_{,,}) + \mathfrak{B}''_{,,,} \cdot (A_{,,,} \cdot C_{,,} - C_{,,,} \cdot A_{,,}) + \mathfrak{C}''_{,,,} \cdot (B_{,,,} \cdot A_{,,} - A_{,,,} \cdot B_{,,})]$$
$$= N \cdot V'''^2,$$

gebracht, unmittelbar die dritte der Relationen [101] geben.

36. Aus den Relationen:

[62], [63], [64]

lassen sich unmittelbar die Relationen:

[94], [98], [100], [101]

ableiten.

Die Gleichung:

$$[A' \cdot 1 + B' \cdot 2 + C' \cdot 3]$$

wird im Systeme [62] geben:

$$[A' \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) + B' \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,}) + C' \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,})] = M'' \cdot V''^2.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Gestalt:

$$[\mathfrak{A}'''_{,,} \cdot (C' \cdot B_{,,} - C_{,,} \cdot B') + \mathfrak{B}'''_{,,} \cdot (A' \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C') + \mathfrak{C}'''_{,,} \cdot (B' \cdot A_{,,} - B_{,,} \cdot A')] = M'' \cdot V''^2;$$

so folgt hieraus die zweite der Gleichungen [94], wenn man an die Stelle der Binomien die üblichen Ausdrücke setzt.

Die Gleichung:

$$[A''' \cdot 1 + B''' \cdot 2 + C''' \cdot 3]$$

gibt uns im Systeme [62]:

$$[A''' \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) + B''' \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,}) + C''' \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,})] = P''^2 \cdot V''^2.$$

Wenn man sie in der Form:

$$[\mathfrak{A}'''_{,,} \cdot (B_{,,} \cdot C''' - B_{,,,} \cdot C'') + \mathfrak{B}'''_{,,} \cdot (C_{,,} \cdot A''' - C_{,,,} \cdot A'') + \mathfrak{C}'''_{,,} \cdot (A_{,,} \cdot B''' - A_{,,,} \cdot B'')]$$

anschreibt, und anstatt der Binomien ihre Abkürzungen substituirt; so erhält man die vierte der Gleichungen des Systemes [98].

Die Gleichung:

$$[A_{,} \cdot 1 + B_{,} \cdot 2 + C_{,} \cdot 3]$$

wird uns im Systeme [62] geben:

$$[A_{,} \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) + B_{,} \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,}) + C_{,} \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,})] = 0.$$

Auf die Form:

$$[\mathfrak{A}'''_{,,} \cdot (C_{,} \cdot B_{,,} - C_{,,} \cdot B_{,}) + \mathfrak{B}'''_{,,} \cdot (A_{,} \cdot C_{,,} - A_{,,} \cdot C_{,}) + \mathfrak{C}'''_{,,} \cdot (B_{,}\, A_{,,} - B_{,,}\, A_{,})] = 0$$

reducirt, enthält sie die dritte der Gleichungen [100].

Die Gleichung:

$$[A_{,,,} \cdot 1 + B_{,,,} \cdot 2 + C_{,,,} \cdot 3]$$

gibt im Systeme [62]:

$$[A_{,,,} \cdot (C_{,,} \cdot \mathfrak{B}'''_{,,} - B_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,}) + B_{,,,} \cdot (A_{,,} \cdot \mathfrak{C}'''_{,,} - C_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,}) + C_{,,,} \cdot (B_{,,} \cdot \mathfrak{A}'''_{,,} - A_{,,}\, \mathfrak{B}'''_{,,})] = N \cdot V''^2,$$

oder reducirt:

$$[\mathfrak{A}'''_{,,}\cdot(B_{,,}\ C_{,,,} - B_{,,,}\ C_{,,}) + \mathfrak{B}'''_{,,}\cdot(A_{,,,}\cdot C_{,,} - A_{,,}\cdot C_{,,,}) + \mathfrak{C}'''_{,,}\cdot(A_{,,}\cdot B_{,,,} - A_{,,,}\cdot B_{,,})] = N\cdot V''^2;$$

und diese Gleichung geht in die zweite der Gleichungen [101] über, wenn man an die Stelle der Binomien ihre Abkürzungen bringt.

37. Aus den Relationen:

[65], [66], [67]

lassen sich unmittelbar die Relationen: . . . .

[87], [89], [93], [98]

ableiten.

Die Gleichung:

$$[A'\cdot 1 + B'\cdot 2 + C'\cdot 3]$$

gibt im Systeme [65]:

$$[A'\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) + B'\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) + C'\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}\ A''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,})] = 0.$$

Drückt man diese Gleichung so aus, daß man schreibt:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,}\cdot(B''\cdot C' - B'\cdot C'') + \mathfrak{B}''_{,,,}\cdot(A'\cdot C'' - A''\cdot C') + \mathfrak{C}''_{,,,}\cdot(B'\cdot A'' - B''\cdot A')] = 0,$$

so geht hieraus offenbar die sechste der Relationen [87] hervor.

Die Gleichung:

$$[A'''\cdot 1 + B'''\cdot 2 + C'''\cdot 3]$$

gibt im Systeme [65]:

$$[A'''\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) + B'''\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) + C'''\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - A''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,})] = N\cdot P''^2.$$

Unter der Gestalt:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,}\cdot(B''\cdot C''' - B'''\cdot C'') + \mathfrak{B}''_{,,,}\cdot(A'''\cdot C'' - A''\cdot C''') + \mathfrak{C}''_{,,,}\cdot(A''\cdot B''' - A'''\cdot B'')] = N\cdot P''^2$$

ist sie die zweite der Relationen [89].

Die Gleichung:

$$[A_{,}\cdot 1 + B_{,}\cdot 2 + C_{,}\cdot 3]$$

im Systeme [65] wird geben:

$$[A_{,}\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,} - B''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,}) + B_{,}\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}''_{,,,} - C''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,}) + C_{,}\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}''_{,,,} - A''\cdot\mathfrak{B}''_{,,,})] = E''\cdot P''^2,$$

und, wenn man sie unter folgender Gestalt anschreibt:

$$[\mathfrak{A}''_{,,,}\cdot(B''\cdot C_{,} - B_{,}\cdot C'') + \mathfrak{B}''_{,,,}\cdot(A_{,}\ C'' - A''\cdot C_{,}) + \mathfrak{C}''_{,,,}\cdot(B_{,}\ A'' - B''\cdot A_{,})] = E''\cdot P''^2,$$

so erhält man die zweite Relation des Systemes [93].

Die Gleichung:

$$[A_{,,,}\cdot 1 + B_{,,,}\cdot 2 + C_{,,,}\cdot 3]$$

im Systeme [65], oder:

$$[A_{\prime\prime\prime}\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}-B''\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime})+B_{\prime\prime\prime}\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}-C''\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime})+C_{\prime\prime\prime}\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}-A''\cdot\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime})]=V'''^2\cdot P''^2,$$

unter folgende Gestalt gebracht:

$$[\mathfrak{A}''_{\prime\prime\prime}\cdot(B''\cdot C_{\prime\prime\prime}-B_{\prime\prime\prime}\cdot C'')+\mathfrak{B}''_{\prime\prime\prime}\cdot(C''\cdot A_{\prime\prime\prime}-C_{\prime\prime\prime}\cdot A'')+\mathfrak{C}''_{\prime\prime\prime}\cdot(A''\cdot B_{\prime\prime\prime}-A_{\prime\prime\prime}\cdot B'')]=V'''^2\cdot P''^2,$$

gibt unmittelbar die vierte der Relationen [98], wenn man an die Stelle der Binomien ihre Abkürzungen bringt.

38. Aus den Relationen:

[68] . . . . . . : [73]

lassen sich unmittelbar die Systeme:

[88], [89], [92], [97]

ableiten.

Die Gleichung:

$$[A'\cdot 1+B'\cdot 2+C'\cdot 3]$$

im Systeme [68] wird uns mit nachfolgender Gleichung versehen:

$$[A'\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}-B''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime})+B'\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}-C''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime})+C'\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}-A''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime})]$$
$$=N\cdot M'',$$

und sie gibt unter der Gestalt:

$$[\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}\cdot(B''\cdot C'-B'\cdot C'')+\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}\cdot(A'\cdot C''-A''\cdot C')+\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}\cdot(A''\cdot B'-A'\cdot B'')]=N\cdot M'',$$

unmittelbar die zweite Relation des Systemes [88].

Die Gleichung:

$$[A'''\cdot 1+B'''\cdot 2+C'''\cdot 3]$$

im Systeme [68], oder:

$$[A'''\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}-B''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime})+B'''\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}-C''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime})+C'''\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}-A''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime})]=N\cdot P'''^2,$$

in folgender Gestalt geschrieben:

$$[\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}\cdot(B''\cdot C'''-B'''\cdot C'')+\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}\cdot(A'''\cdot C''-A''\cdot C''')+\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}\cdot(A''\cdot B'''-A'''\cdot B'')]=N\cdot P'''^2,$$

zeigt uns die dritte Relation des Systemes [89].

Die Gleichung:

$$[A_{\prime}\cdot 1+B_{\prime}\cdot 2+C_{\prime}\cdot 3]$$

im Systeme [68], oder:

$$[A_{\prime}\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime}-B''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime})+B_{\prime}\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'''_{\prime\prime}-C''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime})+C_{\prime}\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'''_{\prime\prime}-A''\cdot\mathfrak{B}'''_{\prime\prime})]=-E'''\cdot M',$$
$$=(V'^2+E'''\cdot P'''^2)$$

in folgender Gestalt geschrieben:

$$[\mathfrak{A}'''_{\prime\prime} \cdot (C_{\prime} \cdot B'' - B_{\prime} \cdot C'') + \mathfrak{B}'''_{\prime\prime} \cdot (A_{\prime} \cdot C'' - A'' \cdot C_{\prime}) + \mathfrak{C}'''_{\prime\prime} \cdot (B_{\prime} \cdot A'' - B'' \cdot A_{\prime\prime})] = - E''' \cdot M'$$
$$= (V'^2 + E''' \cdot P''^2,$$

gibt unmittelbar die dritte der Relationen [97].

Die Gleichung:

$$[A_{\prime\prime\prime} \cdot 1 + B_{\prime\prime\prime} \cdot 2 + C_{\prime\prime\prime} \cdot 3]$$

im Systeme [68], oder:

$$[A_{\prime\prime\prime} . (C'' . \mathfrak{B}'''_{\prime\prime} - B'' . \mathfrak{C}'''_{\prime\prime}) + B_{\prime\prime\prime} . (A'' . \mathfrak{C}'''_{\prime\prime} - C'' . \mathfrak{A}'''_{\prime\prime}) + C_{\prime\prime\prime} . (B'' . \mathfrak{A}'''_{\prime\prime} - A'' . \mathfrak{B}'''_{\prime\prime})] = (N^2 - E' . M')$$
$$= (E'' . M'' + V'''^2 . P'''^2)$$

unter der Gestalt:

$$[\mathfrak{A}'''_{\prime\prime} . (B'' . C_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime\prime} C'') + \mathfrak{B}'''_{\prime\prime} . (C'' . A_{\prime\prime\prime} - C_{\prime\prime\prime} . A'') + \mathfrak{C}'''_{\prime\prime} . (A'' . B_{\prime\prime\prime} - A_{\prime\prime\prime} . B'')] =$$
$$(N^2 - E' . M') = (E'' . M'' + V'''^2 . P'''^2),$$

ist die erste der Relationen [92].

39. Aus den Relationen:

[80], [81], [82]

lassen sich die Systeme:

[86], [88], [89]

ableiten.

Die Gleichung:

$$[A' \cdot 1 + B' \cdot 2 + C' \cdot 3]$$

gibt im Systeme [80]:

$$[A' \cdot (\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime} - \mathfrak{B}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}) + B' \cdot (\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime} - \mathfrak{C}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}) + C' \cdot (\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime} - \mathfrak{A}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime})] = NP'^4.$$

Wird diese Gleichung in folgender Gestalt geschrieben:

$$[\mathfrak{A}'_{\prime\prime} \cdot (B' \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime} - C' \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime}) + \mathfrak{B}'_{\prime\prime} \cdot (C' \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} - A' \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}) + \mathfrak{C}'_{\prime\prime} \cdot (A' \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} - B' \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime})] = NP'^4,$$

oder:

$$[\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} \cdot (C' \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime} - B' \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime}) + \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} \cdot (A' \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime} - C' \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime}) + \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime} \cdot (B' \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime}) - A' \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime})] = N \cdot P'^4,$$

und schreibt man an die Stelle der Binomien ihre Werthe aus den Relationen [66] oder [67]; so erhält man, nach verrichteter Division der Gleichung mit P'^2, die erste der Relationen [89].

Die Gleichung:

$$[A'' \cdot 1 + B'' \cdot 2 + C'' \cdot 3]$$

gibt im Systeme [80]:

$$[A'' \cdot (\mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime} - \mathfrak{B}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime}) + B'' \cdot (\mathfrak{C}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime} - \mathfrak{C}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime}) + C'' \cdot (\mathfrak{A}'_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime} - \mathfrak{A}'_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'_{\prime\prime\prime})]$$
$$= N \cdot M'' \cdot P''^2.$$

Schreibt man diese Gleichung folgender Gestalt an:

$$[\mathfrak{A}'_{''}\cdot(B''\cdot\mathfrak{C}'_{'''}-C''\cdot\mathfrak{B}'_{'''})+\mathfrak{B}'_{''}\cdot(C''\cdot\mathfrak{A}'_{'''}-A''\cdot\mathfrak{C}'_{'''})+\mathfrak{C}'_{''}\cdot(A''\cdot\mathfrak{B}'_{'''}-B''\cdot\mathfrak{A}'_{'''})]=NM'''P'^2,$$

oder:

$$[\mathfrak{A}'_{'''}\cdot(C''\cdot\mathfrak{B}'_{''}-B''\cdot\mathfrak{C}'_{''})+\mathfrak{B}'_{'''}\cdot(A''\cdot\mathfrak{C}'_{''}-C''\cdot\mathfrak{A}'_{''})+\mathfrak{C}'_{'''}\cdot(B''\cdot\mathfrak{A}'_{''}-A''\cdot\mathfrak{B}'_{''})]=NM'''P'^2,$$

und substituirt anstatt der Binomien ihre Werthe aus dem Systeme [46]; so wird die erstere dieser Gleichungen, nachdem man sie durch M''' dividirt hat, die erste der Relationen [89] geben.

Die zweite jener Gleichungen aber gibt, nachdem man in ihr die Werthe der Binomien aus den Relationen [72] substituirt hat:

$$[\mathfrak{A}'_{'''}\cdot(N\cdot A'-A_{''}\cdot M''')+\mathfrak{B}'_{'''}\cdot(N\cdot B'-B_{''}\cdot M''')+\mathfrak{C}'_{'''}\cdot(N\cdot C'-C_{''}\cdot M''')]=$$
$$[\mathfrak{A}'_{'''}\cdot(A_{'''}M''+A_{'}P'^2)+\mathfrak{B}'_{'''}\cdot(B_{'''}\cdot M''+B_{'}\cdot P'^2)+\mathfrak{C}'_{'''}\cdot(C_{'''}\cdot M''+C_{'}\cdot P'^2)]$$
$$=-N\cdot M'''\cdot P'^2.$$

Bringt man diese Gleichung unter folgende Gestalt:

$$[N\cdot(A'\cdot\mathfrak{A}'_{'''}+B'\cdot\mathfrak{B}'_{'''}+C'\cdot\mathfrak{C}'_{'''})-M'''\cdot(A_{''}\cdot\mathfrak{A}'_{'''}+B_{''}\cdot\mathfrak{B}'_{'''}+C_{''}\cdot\mathfrak{C}'_{'''})]=$$
$$[M''(A_{'''}\cdot\mathfrak{A}'_{'''}+B_{'''}\cdot\mathfrak{B}'_{'''}+C_{'''}\cdot\mathfrak{C}'_{'''})+P'^2\cdot(A_{'}\cdot\mathfrak{A}'_{'''}+B_{'}\cdot\mathfrak{B}'_{'''}+C_{'}\cdot\mathfrak{C}'_{'''})]=-N\cdot M'''\cdot P'^2;$$

so gibt diese Gleichung, mit Rücksichtnehmung auf die Systeme [86] und [87], sowohl die erste der Gleichungen des Systemes [89], als auch die dritte der Gleichungen [88].

Die Gleichung:

$$[A'''\cdot 1+B'''\cdot 2+C'''\cdot 3]$$

im Systeme [80] gibt uns:

$$[A'''\cdot(\mathfrak{B}'_{'''}\cdot\mathfrak{C}'_{''}-\mathfrak{B}'_{''}\cdot\mathfrak{C}'_{'''})+B'''\cdot(\mathfrak{C}'_{'''}\cdot\mathfrak{A}'_{''}-\mathfrak{C}'_{''}\cdot\mathfrak{A}'_{'''})+C'''\cdot(\mathfrak{A}'_{'''}\cdot\mathfrak{B}'_{''}-\mathfrak{A}'_{''}\cdot\mathfrak{B}'_{'''})]$$
$$=N\cdot M''\cdot P'^2.$$

Die Entwicklung dieser Gleichung ist der vorhergehenden ähnlich; sie enthält die erste des Systemes [89] und die zweite des Systemes [88].

Die Gleichung:

$$[A_{'}\cdot 1+B_{'}\cdot 2+C_{'}\cdot 3]$$

im Systeme [80] gibt:

$$[A_{'}\cdot(\mathfrak{B}'_{'''}\cdot\mathfrak{C}'_{''}-\mathfrak{B}'_{''}\cdot\mathfrak{C}'_{'''})+B_{'}\cdot(\mathfrak{C}'_{'''}\cdot\mathfrak{A}'_{''}-\mathfrak{C}'_{''}\cdot\mathfrak{A}'_{'''})+C_{'}\cdot(\mathfrak{A}'_{'''}\cdot\mathfrak{B}'_{''}-\mathfrak{A}'_{''}\cdot\mathfrak{B}'_{'''})]=$$
$$N^2\cdot P'^2.$$

Schreibt man sie in folgender Gestalt:

$$[\mathfrak{A}'_{''}\cdot(B_{'}\cdot\mathfrak{C}'_{'''}-C_{'}\cdot\mathfrak{B}'_{'''})+\mathfrak{B}'_{''}\cdot(C_{'}\cdot\mathfrak{A}'_{'''}-A_{'}\cdot\mathfrak{C}'_{'''})+\mathfrak{C}'_{''}\cdot(A_{'}\cdot\mathfrak{B}'_{'''}-B_{'}\cdot\mathfrak{A}'_{'''})]=$$
$$[\mathfrak{A}'_{'''}\cdot(C_{'}\cdot\mathfrak{B}'_{''}-B_{'}\cdot\mathfrak{C}'_{''})+\mathfrak{B}'_{'''}\cdot(A_{'}\cdot\mathfrak{C}'_{''}-C_{'}\cdot\mathfrak{A}'_{''})+\mathfrak{C}'_{'''}\cdot(B_{'}\cdot\mathfrak{A}'_{''}-A_{'}\cdot\mathfrak{B}'_{''})]=N^2\cdot P'^2.$$

Setzt man an die Stelle der Binomien die Ausdrücke für sie aus den Relationen [59] und [60]; so wird man nach einigen Reductionen haben:

$$[N\cdot(A_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}+B_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}+C_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,})-E''\cdot(A'\cdot\mathfrak{A}'_{,,}+B'\cdot\mathfrak{B}'_{,,}+C'\cdot\mathfrak{C}'_{,,})]=$$

$$[E'\cdot(A''\cdot\mathfrak{A}'_{,,}+B''\cdot\mathfrak{B}'_{,,}+C''\cdot\mathfrak{C}'_{,,})+V''^{2}\cdot(A'''\cdot\mathfrak{A}'_{,,}+B'''\cdot\mathfrak{B}'_{,,}+C'''\cdot\mathfrak{C}'_{,,})]=$$

$$[N\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}+B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}+C_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})-E'''\cdot(A'\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}+B'\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}+C'\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})]=$$

$$[E'\cdot(A'''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}+B'''\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}+C'''\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})+V''^{2}(A''\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}+B''\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}+C''\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})]=N^{2}\cdot P'^{2}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die erste der Relationen [89].

Die Gleichung:

$$[A_{,,}\cdot 1+B_{,,}\cdot 2+C_{,,}\cdot 3]$$

im Systeme [80] gibt:

$$[A_{,,}\cdot(\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}-\mathfrak{B}'_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})+B_{,,}\cdot(\mathfrak{C}'_{,,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}-\mathfrak{C}'_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,})+C_{,,}\cdot(\mathfrak{A}'_{,,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}-\mathfrak{A}'_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,})]=0$$

oder:

$$[\mathfrak{A}'_{,,}\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,})+\mathfrak{B}'_{,,}\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,,})+\mathfrak{C}'_{,,}\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,,})]=$$

$$[\mathfrak{A}'_{,,,}\cdot(C_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,}-B_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,})+\mathfrak{B}'_{,,,}\cdot(A_{,,}\cdot\mathfrak{C}'_{,,}-C_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,})+\mathfrak{C}'_{,,,}\cdot(B_{,,}\cdot\mathfrak{A}'_{,,}-A_{,,}\cdot\mathfrak{B}'_{,,})]=0.$$

Substituirt man hierin für die Binomien die Ausdrücke der Systeme [47] und [64]; so erhält man die vierte und fünfte der Relationen [86].

Dieselben Relationen findet man auch aus der entwickelten Gleichung:

$$[A_{,,,}\cdot 1+B_{,,,}\cdot 2+C_{,,,}\cdot 3],$$

wenn man in dieser Entwicklung für die Binomien ihre Werthe aus den Systemen [47] und [63] substituirt.

Diesen Reductionen sind auch diejenigen ähnlich, welche man mit den Relationen [83], [84], [85] noch vornehmen kann, daher ich mich nicht mehr länger dabei verweilen werde.

40. Eine neue Classe von Relationen bilden diejenigen Systeme von Gleichungen, in welchen nur diejenigen Ausdrücke erscheinen, welche wir mit

$$M\ E\ K\ P\ V\ \mathfrak{P}\ N\ \mathfrak{N}$$

bezeichnet haben.

Bemerkt man noch, daß sich die Größen K $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{N}$ auf eine einfache Art aus den Größen:

$$N\ M\ P$$

zusammensetzen, wie uns die Relationen [19], [20], [21] lehren; so wird man aus den zwischen den fünf Ausdrücken M E P V N bestehenden Relationen auch sehr leicht ähnliche Relationen ableiten, in denen an die Stelle von N M P die Ausdrücke $\mathfrak{N}$ K $\mathfrak{P}$ gesetzt sind.

Wir wollen also zuerst die einfachsten Relationen aufsuchen, welche zwischen den fünf Ausdrücken:

$$M\ E\ P\ V\ N$$

obwalten, und werden hierauf zu einigen zusammengesetzteren übergehen.

41. Unter den drei Elementen:

$$V\ M\ P$$

finden die nachstehenden drei Relationen Statt:

$$\left.\begin{array}{l} V'^2 = (P''^2 . P'''^2 - M'^2); \\ V''^2 = (P'^2 . P'''^2 - M''^2); \\ V'''^2 = (P'^2 . P''^2 - M'''^2); \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} V' = \sqrt{[P''^2 . P'''^2 - M'^2]}; \\ V'' = \sqrt{[P'^2 . P'''^2 - M''^2]}; \\ V''' = \sqrt{[P'^2 . P''^2 - M'''^2]}; \end{array}\right\} \quad [103]$$

Diese Relationen lassen sich auf mehr als eine Art aus den bisher bereits entdeckten Relationen ableiten. So geben schon die Gleichungen (α) im Art. 21, wenn man sie respective mit $A'''\ B'''\ C'''$ multiplicirt:

$$[A''' . \mathfrak{A}''_{\prime} + B''' . \mathfrak{B}''_{\prime} + C''' . \mathfrak{C}''_{\prime}] = (P''^2 . P'''^2 - M'^2) = V'^2,$$

gemäß der Relationen [90].

Werden die Relationen [103] rechter Hand mit N^2 multiplicirt, und schafft man auf der andern Seite des Gleichheitszeichens die Größe N^2 unter das Wurzelzeichen; so hat man, unter Zuziehung der Relationen [19], [20] und [21]:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{N} . V' = \sqrt{[\mathfrak{P}''^2 . \mathfrak{P}'''^2 - K'^2]}; \\ \mathfrak{N} . V'' = \sqrt{[\mathfrak{P}'^2 . \mathfrak{P}'''^2 - K''^2]}; \\ \mathfrak{N} . V''' = \sqrt{[\mathfrak{P}'^2 . \mathfrak{P}''^2 - K'''^2]}; \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [104]$$

Hieraus folgt also, daß unter den Größen:

$$\mathfrak{N} . V;\ \ \mathfrak{P};\ \ K$$

genau dieselben Relationen obwalten, als unter den Größen:

$$V,\ P,\ M.$$

Dieß ist schon daraus einleuchtend, weil diese Größen auf dieselbe Weise aus den Größen $A'\ B'\ C' \ldots$ zusammengesetzt sind, als jene aus den Größen $A,\ B,\ C, \ldots$

Weil ein Unterschied zweier Quadrate immer in zwei reelle Factoren aufgelöst werden kann; so werden die Relationen [103] auch noch unter folgender Gestalt geschrieben werden können:

$$\left.\begin{array}{l} V' = \sqrt{[P''.P''' + M']\,.\,[P''.P''' - M']}; \\ V'' = \sqrt{[P'.P''' + M'']\,.\,[P'.P''' - M'']}; \\ V''' = \sqrt{[P'.P'' + M''']\,.\,[P'.P'' - M''']}; \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ [105]$$

42. Unter den drei Elementen:

$$M \quad E \quad P$$

finden die nachstehenden Relationen Statt:

$$\left.\begin{aligned} E' &= [M''\cdot M''' - P'^2 \cdot M']; \\ E'' &= [M'\cdot M''' - P''^2\cdot M'']; \\ E''' &= [M'\cdot M'' - P'''^2\cdot M''']; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [106]$$

Auf diese Relationen kann man mit Hilfe der schon entdeckten auf mehr als eine Art gelangen. So z. B. geben die Relationen [42], wenn man sie respective mit A' B' C' multiplicirt, und hierauf addirt, die Gleichung:

$$[A'\cdot(B''\cdot C_{,,} - B_{,,}\cdot C'') + B'\cdot(C''\cdot A_{,,} - C_{,,}\cdot A'') + C'\cdot(A''\cdot B_{,,} - A_{,,}\cdot B'')] = $$
$$[M''\cdot M''' - P'^2\cdot M'];$$

und wenn man die Glieder dieser Gleichung so ordnet, daß man schreibt:

$$[A_{,,}\cdot(B'\cdot C'' - B''\cdot C') + B_{,,}\cdot(C'\cdot A'' - C''\cdot A') + C_{,,}\cdot(A'\cdot B'' - A''\cdot B')] = $$
$$(M''\cdot M''' - P'^2\cdot M');$$

so wird alsogleich die erste der Relationen [106] zum Vorschein kommen, wenn man nur noch an die Stelle der Binomien ihre Abkürzungen aus [1] bringt, und für das erhaltene Trinomium:

$$[A_{,,}\cdot A_{,,,} + B_{,,}\cdot B_{,,,} + C_{,,}\cdot C_{,,,}]$$

den einfachen Buchstaben E' substituirt.

Diese Relationen [106] folgen auch noch aus den drei Systemen: [50], [51], [52]. So z. B. gibt die Gleichung:

$$[A'\cdot 1 + B'\cdot 2 + C'\cdot 3]$$

im Systeme [52] unmittelbar:

$$E' = (M''\cdot M''' - P'^2\cdot M').$$

Auch führt die Vergleichung der Ausdrücke des Systemes [93] mit denen des Systemes [95] unmittelbar auf diese drei Gleichungen hin.

Wird jede der Gleichungen [106] mit der Gleichung

$$\mathfrak{N}^2 = N^4$$

multiplicirt, und macht man von den Relationen [19] und [20] Gebrauch; so erhält man unmittelbar das nachstehende System:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}^2\cdot E' &= [K''\cdot K''' - K'\cdot\mathfrak{P}'^2]; \\ \mathfrak{N}^2\cdot E'' &= [K'\cdot K''' - K''\cdot\mathfrak{P}''^2]; \\ \mathfrak{N}^2\cdot E''' &= [K'\cdot K'' - K'''\cdot\mathfrak{P}'''^2]; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [107]$$

Die Vergleichung beider Systeme [106] und [107] zeigt uns also, daß die Größen:

$$(\mathfrak{N}^2 \cdot E);\quad K;\quad \mathfrak{P}$$

genau dieselben Beziehungen gegen einander haben, als die Größen:

$$E\;\; M\;\; P.$$

43. Unter den vier Elementen:

$$M,\; E,\; V,\; N$$

finden nachfolgende Relationen Statt:

$$\left.\begin{aligned} N^2 \cdot M' &= [E'' \cdot E''' - E' \cdot V'^2]; \\ N^2 \cdot M'' &= [E' \cdot E''' - E'' \cdot V''^2]; \\ N^2 \cdot M''' &= [E' \cdot E'' - E''' \cdot V'''^2]; \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad [108].$$

Auf diese Relationen kann man abermals auf mehr als eine Art gelangen. So z. B., wenn man die Relationen [51] rechter Hand respective mit $A, B, C,$ multiplicirt, und diese Gleichungen hierauf in eine Summe bringt, wird man erhalten:

$$[A_{,} \cdot (A_{,,,} \cdot E''' - A_{,} \cdot E'') + B_{,} \cdot (B_{,,,} \cdot E''' - B_{,} \cdot E'') + C_{,} \cdot (C_{,,,} \cdot E''' - C_{,} \cdot E'')]$$
$$= N^2 \cdot M',$$

und diese reducirt sich leicht auf folgende:

$$[E''' \cdot (A_{,} \cdot A_{,,,} + B_{,} \cdot B_{,,,} + C_{,} \cdot C_{,,,}) - E'' \cdot (A_{,}^2 + B_{,}^2 + C_{,}^2)] = N^2 \cdot M',$$

welche unmittelbar gibt:

$$N^2 \cdot M' = (E'' \cdot E''' - V'^2 \cdot E'').$$

Die Relationen [108] in Verbindung mit den Relationen [19] führen nun sogleich auf die nachstehenden Beziehungen zwischen den Größen:

$$K\;\; E\;\; V:$$

$$\left.\begin{aligned} K' &= [E'' \cdot E''' - E' \cdot V'^2]; \\ K'' &= [E' \cdot E''' - E'' \cdot V''^2]; \\ K''' &= [E' \cdot E'' - E''' \cdot V'''^2]; \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad [109]$$

Vergleicht man dieses System mit dem Systeme [106]; so wird man finden, daß die Beziehungen der drei Größen

$$K\;\; E\;\; V$$

dieselben sind, als die Beziehungen der Größen

$$E\;\; M\;\; P.$$

Und in der That muß dem so seyn, weil die Größen $K\,E\,V$ auf dieselbe Weise aus den Größen $A, B, C, \cdots$ zusammengesetzt werden, wie die Ausdrücke $E\,M\,P$ aus den Größen $A'\, B'\, C' \cdots$

44. Unter den vier Größen:

$$E\ V\ P\ N$$

finden nachstehende Relationen Statt:

$$\left.\begin{aligned} N^2\cdot P'^2 &= [V''^2\cdot V'''^2 - E'^2];\\ N^2\cdot P''^2 &= [V'^2\cdot V'''^2 - E''^2];\\ N^2\cdot P'''^2 &= [V'^2\cdot V''^2 - E''']; \end{aligned}\right\}\ \text{oder}\ \left\{\begin{aligned} N\cdot P' &= \sqrt{[V''^2\cdot V'''^2 - E'^2]};\\ N\cdot P'' &= \sqrt{[V'^2\cdot V''^2 - E''^2]};\\ N\cdot P'''^2 &= \sqrt{[V'^2\cdot V''^2 - E'''^2]}; \end{aligned}\right\}\quad [110]$$

Auch diese Relationen können gleichfalls auf mehr als eine Art aus den bereits entdeckten Relationen abgeleitet werden.

So z. B. multiplicire man die Gleichungen des Systemes [38] rechter Hand respective mit den Größen $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$, und bringe sie in eine Summe; so wird man erhalten:

$$N\cdot[A_{,,}\cdot\mathfrak{A}'''_{,} + B_{,,}\cdot\mathfrak{B}'''_{,} + C_{,,}\cdot\mathfrak{C}'''_{,}] = [V''^2\cdot V'''^2. - E'^2] = N^2\cdot P'^2,$$

gemäß der Relationen [89].

Vergleicht man die Systeme [110] und [20] mit einander; so wird man finden, daß unter den drei Größen:

$$E\ V\ \mathfrak{P}$$

nachstehende Relationen Statt finden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \sqrt{[V''^2\cdot V'''^2 - E'^2]};\\ \mathfrak{P}'' &= \sqrt{[V'^2\cdot V'''^2 - E''^2]};\\ \mathfrak{P}''' &= \sqrt{[V'^2\cdot V''^2 - E''']}; \end{aligned}\right\}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\quad [111]$$

Vergleicht man dieses System mit dem Systeme [103]; so erfährt man, daß zwischen den Größen:

$$E\ V\ \mathfrak{P}$$

genau dieselben Beziehungen Statt finden, als zwischen den respectiven Größen:

$$M\ P\ V.$$

In der That muß es dem so seyn, weil die Größen $E\ V\ \mathfrak{P}$ auf dieselbe Art von den Größen $A, B, C, \cdots$ abhängen, wie die Größen $M\ P\ V$ von $A'\ B'\ C' \ldots$

Da in den Relationen [110] die Glieder rechter Hand des Gleichheitszeichens Unterschiede von Quadraten sind, welche sich in zwei reelle Factoren auflösen lassen; so wird man dieselben auch noch folgender Gestalt schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} N\cdot P' &= \sqrt{[V''\cdot V''' + E'] \cdot [V''\cdot V''' - E']};\\ N\cdot P'' &= \sqrt{[V'\cdot V''' + E''] \cdot [V'\cdot V''' - E'']};\\ N\cdot P''' &= \sqrt{[V'\cdot V'' + E'''] \cdot [V'\cdot V'' - E''']}; \end{aligned}\right\}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\quad [112]$$

45. Unter den Größen:

$$E\ V\ P\ M$$

finden ferner folgende Relationen Statt:

$$\left.\begin{array}{l}[V'^2 \cdot M'' + P'''^2 \cdot E'' + M' \cdot E'''] = 0;\ [V'^2 \cdot M''' + P''^2 \cdot E''' + M' \cdot E''] = 0; \\ [V''^2 \cdot M''' + P'^2 \cdot E''' + M'' \cdot E'] = 0;\ [V''^2 \cdot M' + P'''^2 \cdot E' + M'' \cdot E'''] = 0; \\ [V'''^2 \cdot M' + P''^2 \cdot E' + M''' \cdot E''] = 0;\ [V'''^2 \cdot M'' + P'^2 \cdot E'' + M''' \cdot E'] = 0; \end{array}\right\} [113]$$

Diese Relationen folgen unmittelbar aus dem Systeme [97]. Man hätte sie aber auch schon aus den Systemen [23], [24], [25] ableiten können.

So z. B. gibt die Gleichung:

$$[A_, \cdot 1 + B_, \cdot 2 + C_, \cdot 3]$$

im Systeme [25] unmittelbar die erste Gleichung im Systeme [113].

Werden die Relationen [113] mit N^2 multiplicirt; so erhält man, mit Anwendung der Relationen [19] und [20] nachstehende Beziehungen zwischen den Ausdrücken:

$$E\ V\ \mathfrak{P}\ K$$

$$\left.\begin{array}{l}[V'^2 \cdot K'' + \mathfrak{P}'''^2 \cdot E'' + K' \cdot E'''] = 0;\ [V'^2 \cdot K''' + \mathfrak{P}''^2 \cdot E''' + K' \cdot E''] = 0; \\ [V''^2 \cdot K''' + \mathfrak{P}'^2 \cdot E''' + K'' \cdot E'] = 0;\ [V''^2 \cdot K' + \mathfrak{P}'''^2 \cdot E' + K'' \cdot E'''] = 0; \\ [V'''^2 \cdot K' + \mathfrak{P}''^2 \cdot E' + K''' \cdot E''] = 0;\ [V'''^2 \cdot K'' + \mathfrak{P}'^2 \cdot E'' + K''' \cdot E'] = 0; \end{array}\right\} [114]$$

46. Unter den Größen: . . .

$$E\ V\ P\ M\ N$$

finden endlich noch folgende Relationen Statt:

$$\left.\begin{array}{l} N^2 = [P'^2 \cdot V'^2 + M'' \cdot E'' + M''' \cdot E''']; \\ N^2 = [P''^2 \cdot V''^2 + M' \cdot E' + M''' \cdot E''']; \\ N^2 = [P'''^2 \cdot V'''^2 + M'' \cdot E'' + M' \cdot E']; \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [115]$$

Diese Relationen, welche sich unmittelbar aus den Relationen des Systemes [97] ergeben, folgen auch schon aus den Relationen [23], [24], [25].

So z. B. gibt uns die Gleichung im Systeme [23]:

$$[A_, \cdot 1 + B_, \cdot 2 + C_, \cdot 3]$$

nach ihrer gehörigen Entwicklung und Reduction unmittelbar die erste Relation des Systemes [115].

Eben so ergeben sich die Gleichungen des Systemes [115] aus den Relationen [29], [30], [31].

So z. B. gibt die Gleichung:

$$[A' \cdot 1 + B' \cdot 2 + C' \cdot 3]$$

im Systeme [29] unmittelbar gleichfalls die erste der Relationen [115].

Aus denselben Gleichungen der Systeme [29], [30], [31] würde man auch die Relationen [113] ableiten können. So z. B. gibt die Gleichung:

$$[A''' \cdot 1 + B''' \cdot 2 + C''' \cdot 3]$$

im Systeme [29], wenn sie gehörig entwickelt und reducirt wird, unmittelbar die erste der Relationen [113].

Werden die Relationen [115] mit $N^2 = \mathfrak{N}$ multiplicirt; so erhält man aus ihnen mit Hilfe der Gleichungen [19] und [20] zwischen den Größen: $E\ V\ \mathfrak{P}\ K\ \mathfrak{N}$ folgende Beziehungen: . . . .

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{P}'^2 \cdot V'^2 + K'' \cdot E'' + K''' \cdot E'''; \\ \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{P}''^2 \cdot V''^2 + K''' \cdot E''' + K' \cdot E'; \\ \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{P}'''^2 \cdot V'''^2 + K' \cdot E' + K'' \cdot E''; \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad [116]$$

Diese in den Systemen [103] bis [116] entwickelten Relationen sind hinreichend, um eine große Menge anderer, zum Theil sehr merkwürdiger Gleichungen daraus herzuleiten, was durch mannigfaltige Verknüpfungen unter den bereits entdeckten Systemen bewerkstelliget werden kann, davon ich aber nur einige hier anführen werde.

47. Unter allen Ausdrücken, welche man aus den Größen:

$$E\ V\ M\ P$$

zusammensetzen kann, sind besonders vier merkwürdig, wofür wir einzelne Buchstaben gebrauchen werden, und welche sehr einfache Reductionen verstatten; diese sind:

$$\left.\begin{array}{l} [P'^2 \cdot M'^2 + P''^2 \cdot M''^2 + P'''^2 \cdot M'''^2] = \Pi \\ [P'^2 \cdot V'^2 + P''^2 \cdot V''^2 + P'''^2 \cdot V'''^2] = W \\ [E' \cdot M' + E'' \cdot M'' + E''' \cdot M'''] = \Delta \\ [E'^2 \cdot V'^2 + E''^2 \cdot V''^2 + E'''^2 \cdot V'''^2] = U \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad [117]$$

Um diese Ausdrücke noch unter andern Gestalten kennen zu lernen, müssen wir uns aus den bereits bekannten Relationen Gleichungen zwischen ihnen herzuleiten suchen, woraus diese Größen gefunden werden können. Zu diesen Gleichungen wird man am leichtesten auf folgendem Wege gelangen.

Man multiplicire die Gleichungen [103] respective mit P'^2, P''^2, P'''^2, und bringe sie hierauf in eine Summe; so wird man erhalten:

$$W = 3 \cdot P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2 - \Pi; \quad \cdots\cdots \quad (\alpha)$$

Ferner multiplicire man die Gleichungen [106] respective mit M', M'', M''', und bringe sie in eine Summe; so wird man haben:

$$\Delta = 3 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''' - \Pi; \quad \cdots\cdots \quad (\beta)$$

Ferner multiplicire man die Gleichungen [108] respective E', E'', E''', und addire sie; so wird man erhalten:

$$N^2 \cdot \varDelta = 3 \cdot E' \cdot E'' \cdot E''' - U; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

Eben so multiplicire man die Gleichungen [110] respective mit V'^2, V''^2, V'''^2; so wird man haben:

$$N^2 \cdot W = 3 \cdot V'^2 \cdot V''^2 \cdot V'''^2 - U; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\delta)$$

Endlich addire man die Gleichungen des Systemes [115]; so wird man bekommen:

$$3 \cdot N^2 = W + 2 \cdot \varDelta; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\varepsilon)$$

Aus diesen Gleichungen $(\alpha) \cdot \cdot (\varepsilon)$, welche sehr merkwürdige Beziehungen zwischen den Größen $\Pi\ W\ \varDelta\ U$ enthalten, wird man die Werthe dieser Ausdrücke sehr leicht berechnen können. Aus den vier erstern Gleichungen fließt die sehr merkwürdige Relation:

$$N^2 = \left\{\frac{E' \cdot E'' \cdot E''' - V'^2 \cdot V''^2 \cdot V'''^2}{M' \cdot M'' \cdot M''' - P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad [118]$$

Zieht man von (β) die Gleichung (α) ab, so daß man habe:

$$(\varDelta - W) = 3 \cdot (M' \cdot M'' \cdot M''' - P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2),$$

und verbindet hiemit die Gleichung (ε); so findet man aus diesen zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= [N^2 + M' \cdot M'' \cdot M''' - P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2]; \\ W &= [N^2 - 2 \cdot (M' \cdot M'' \cdot M''' - P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2)]; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [119]$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke findet man aus den Gleichungen $(\alpha) \cdot \cdot (\delta)$:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= [2 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''' + P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2 - N^2]; \\ U &= [2 \cdot E' \cdot E'' \cdot E''' + V'^2 \cdot V''^2 \cdot V'''^2 - N^4]; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [120]$$

Die Gleichungen $(\alpha) \cdot \cdot (\varepsilon)$ lassen sich wieder auf mannigfaltige Weise unter einander verbinden; davon die vorzüglichsten sind:

$$\left.\begin{aligned} (W - 2 \cdot \Pi) &= 3 \cdot [N^2 - 2 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''']; \\ (2 \cdot N^2 \cdot \varDelta - U) &= 3 \cdot [N^4 - V'^2 \cdot V''^2 \cdot V'''^2]; \\ (U - N^2 \cdot \Pi) &= 3 \cdot [V'^2 \cdot V''^2 \cdot V''' - N^2 \cdot P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2]; \\ &= 3 \cdot [E' \cdot E'' \cdot E''' - N^2 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''']; \\ (2 \cdot \varDelta - \Pi) &= [3 \cdot N^2 - P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2]; \\ (U - N^2 \cdot \varDelta) &= [3 \cdot V'^2 \cdot V''^2 \cdot V'''^2 - N^4]; \\ (2 \cdot U - N^2 \cdot W) &= 3\ [N^4 - 2 \cdot E' \cdot E'' \cdot E''']; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad [121]$$

48. Mit Hilfe dieser Ausdrücke $\Pi\ W\ \varDelta\ U$ können itzt noch mehrere ihnen ähnliche entwickelt werden, von welchen wir einige kurz anzeigen wollen.

Multiplicirt man die Gleichungen [103] respective mit E'^2, E''^2, E'''^2, und bringt sie in eine Summe; so erhält man eine Gleichung, aus der man sogleich nachstehende Relation findet:

$$U = [(E'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2 + E''^2 \cdot P'^2 \cdot P'''^2 + E'''^2 \cdot P'^2 \cdot P''^2)$$
$$- (E'^2 \cdot M'^2 + E''^2 \cdot M''^2 + E'''^2 \cdot M'''^2)].$$

Multiplicirt man die Gleichungen [110] respective mit M'^2, M''^2, M'''^2, und addirt sie; so bekömmt man:

$$\left.\begin{array}{l} N^2 \cdot \Pi = [M'^2 \cdot V''^2 \cdot V'''^2 + M''^2 \cdot V'^2 \cdot V'''^2 + M'''^2 \cdot V'^2 \cdot V''^2] \\ \qquad - (M'^2 \cdot E'^2 + M''^2 \cdot E''^2 + M'''^2 \cdot E'''^2). \end{array}\right\}$$

Zieht man diese zwei Gleichungen von einander ab; so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} [(M'^2 . V''^2 . V'''^2 + M''^2 . V'^2 . V'''^2 + M'''^2 . V'^2 . V''^2) \\ -(E'^2 . P''^2 . P'''^2 + E''^2 . P'^2 . P'''^2 + E'''^2 . P'^2 . P''^2) \end{array}\right\} = 3 \cdot (V'^2 V''^2 V'''^2 - N^2 \cdot P'^2 P''^2 P'''^2)$$
$$= 3 \cdot (E' E'' E''' - N^2 \cdot M' M'' M''').$$

Da es nicht schwer ist, noch mehrere solche Relationen zu finden; so werde ich alle ähnlichen übergehen.

49. Hier sollen noch ein Paar andere nicht minder merkwürdige Relationen eine Stelle erhalten, welche wir weiter oben noch nicht anführen konnten. Der nöthigen Kürze wegen müssen wir noch einige neue Bezeichnungen einführen. Es lassen sich nemlich aus den Relationen [68] bis [73] einige Trinomien ableiten, welche man in Gestalt von Binomien ausdrücken kann; und es ist sehr interessant, dieselben kennen zu lernen.

Schreibt man die erste der Gleichungen [73] auf folgende Art:

$$A_{,,} \cdot M''' + A_{,,,} \cdot M'' = N \cdot A' - A_{,} \cdot P'^2,$$

und multiplicirt diese Gleichung mit M'; so bekömmt man:

$$A_{,,} \cdot M' \cdot M''' + A_{,,,} \cdot M' \cdot M'' = N \cdot A' \cdot M' - A_{,} \cdot M' \cdot P'^2.$$

Addirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung $A_{,} \cdot M'' M'''$; so erhält man:

$$A_{,} \cdot M'' M''' + A_{,,} \cdot M' M''' + A_{,,,} \cdot M' M'' = N \cdot A' M' + A_{,} \cdot (M'' M''' - M' P'^2)$$

Aber da:

$$(M'' M''' - M' P'^2) = E',$$

den Relationen [106] gemäß; so wird unsere behandelte Gleichung werden:

$$(A_{,} \cdot M'' M''' + A_{,,} \cdot M' M''' + A_{,,,} \cdot M' M'') = (N \cdot A' \cdot M' + A_{,} \cdot E').$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die Trinomien, in welchen B und C an der Stelle A stehen. Wir wollen für sie nachstehende Bezeichnungen gebrauchen:

$$\left.\begin{aligned} A_{,}\cdot M''M''' + A_{,,}\cdot M'M''' + A_{,,,}\cdot M'M'' &= [\mathfrak{A}];\\ B_{,}\cdot M''M''' + B_{,,}\cdot M'M''' + B_{,,,}\cdot M'M'' &= [\mathfrak{B}];\\ C_{,}\cdot M''M''' + C_{,,}\cdot M'M''' + C_{,,,}\cdot M'M'' &= [\mathfrak{C}]; \end{aligned}\right\}\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad [122]$$

Durch das so eben angegebene Verfahren wird man nachstehende Resultate erhalten:

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{A}] &= (N\cdot A'M' + A_{,}\cdot E') = (N\cdot A''M'' + A_{,,}\cdot E'') = (N\cdot A'''M''' + A_{,,,}\cdot E''');\\ [\mathfrak{B}] &= (N\cdot B'M' + B_{,}\cdot E') = (N\cdot B''M'' + B_{,,}\cdot E'') = (N\cdot B'''M''' + B_{,,,}\cdot E''');\\ [\mathfrak{C}] &= (N\cdot C'M' + C_{,}\cdot E') = (N\cdot C''M'' + C_{,,}\cdot E'') = (N\cdot C'''M''' + C_{,,,}\cdot E'''); \end{aligned}\right\}\quad [123]$$

Entwickeln wir itzt die Gleichung:

$$[A_{,}\cdot 1 + B_{,}\cdot 2 + C_{,}\cdot 3]$$

sowohl im Systeme [122] als [123]; so wird man haben:

$$[V'^2\cdot M''M''' + E'''\cdot M'M''' + E''\cdot M'M''] =$$
$$(N^2\cdot M' + V'^2\cdot E') = E''E'''.$$

Sucht man sowohl aus den Gleichungen des Systemes [122] als auch des Systemes [123] den Ausdruck:

$$\left\{ [\mathfrak{A}]^2 + [\mathfrak{B}]^2 + [\mathfrak{C}]^2 \right\};$$

so wird man auf nachstehende Gleichung geführt:

$$\left\{\begin{aligned} &(V'^2\cdot M''^2M'''^2 + V''^2\cdot M'^2M'''^2 + V'''^2\cdot M'^2M''^2)\\ &+ 2\,(E'M'^2\cdot M''M''' + E''M''^2\cdot M'M''' + E'''\cdot M'''^2\cdot M'M''). \end{aligned}\right\} =$$
$$(N^2\cdot(P'^2\cdot M'^2 + 2\,M'E') + V'^2\cdot E'^2) =$$
$$(N^2\cdot(P''^2\cdot M''^2 + 2\,M''E'') + V''^2\cdot E''^2) =$$
$$(N^2\cdot(P'''^2\cdot M'''^2 + 2\,M'''E''') + V'''^2\cdot E'''^2).$$
$$= \left\{\begin{aligned} &(V'^2\cdot M''^2M'''^2 + V''^2\cdot M'^2\cdot M'''^2 + V'''^2\cdot M'^2\cdot M''^2)\\ &+ 2\cdot M'M''M'''\cdot(E'M' + E''M'' + E'''M''') \end{aligned}\right\}$$
$$= [V'^2\cdot M''^2M'''^2 + V''^2\cdot M'^2\cdot M'''^2 + V'''^2\cdot M'^2\cdot M''^2] + 2\cdot M'M''M'''.\,\Delta.$$

Diese Gleichung läßt sich nun auf eine sehr einfache reduciren. Bemerkt man nemlich, daß:

$$E' = M''\cdot M''' - M'\cdot P'^2$$

und:

$$E''\cdot E''' - E'\cdot V'^2 = N^2\cdot M';$$

so gibt die Multiplication dieser beiden Gattungen:

$$E'E''E''' - E'^2V'^2 = N^2\cdot M'M''M''' - N^2\cdot P'^2M'^2,$$

welche Relation auch schon unmittelbar aus den Relationen [121] abgeleitet werden könnte. Es ist also:

$$(E'^2 \cdot V'^2 - N^2 \cdot M'^2 \cdot P'^2) = (E''^2 \cdot V''^2 - N^2 \cdot P''^2 M''^2) = (E'''^2 \cdot V'''^2 - N^2 \cdot P'''^2 \cdot M'''^2)$$
$$= [E' \cdot E'' \cdot E''' - N^2 \cdot M' M'' M'''] \quad . \quad . \quad . \; [124].$$

Setzt man nun den Werth von $N^2 \cdot P'^2 \cdot M'^2$ aus dieser Gleichung in die vorhergehende; so wird man erhalten:

$$[V'^2 \cdot M'^2 M''^2 + V''^2 \cdot M'^2 M''^2 + V'''^2 \cdot M'^2 M''^2] + 2 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''' \cdot \Delta$$
$$= [2\, E'^2 \cdot V'^2 + 2 \cdot N^2 \cdot E' \cdot M' - E' \cdot E'' \cdot E''' + N^2 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''']$$
$$= [2 \cdot E' . (E' V'^2 + N^2 \cdot M') - E' \cdot E'' \cdot E''']$$
$$= [E' \cdot E'' . E''' + N^2 \cdot M' M'' M'''].$$

Hieraus folgt also eine sehr merkwürdige Beziehung. Es ist nemlich:

$$[V'^2 \cdot M''^2 \cdot M'''^2 + V''^2 \cdot M'^2 \cdot M'''^2 + V'''^2 \cdot M'^2 \cdot M''^2] =$$
$$E' \cdot E'' \cdot E''' - M' \cdot M'' \cdot M''' \cdot (N^2 + 2 \cdot M' \cdot M'' \cdot M''' - 2 \cdot P'^2 \cdot P''^2 \cdot P'''^2)] \; . \; . \; . \; [124]^*$$

50. Aus den Relationen [123] fließen einige sehr merkwürdige Werthe für die Größe N^2, welche wir anführen wollen. Eliminirt man aus je zweien der Gleichungen [103] eine der drei Größen P'^2, P''^2, P'''^2; so wird man dieselben Gleichungen [123] erhalten. Aus ihnen folgt sodann weiter:

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= \left\{ \frac{V'^2 \cdot E'^2 - V''^2 \cdot E''^2}{P'^2 \cdot M'^2 - P''^2 \cdot M''^2} \right\}; \\ N^2 &= \left\{ \frac{V''^2 \cdot E''^2 - V'''^2 \cdot E'''^2}{P''^2 \cdot M''^2 - P'''^2 \cdot M'''^2} \right\}; \\ N^2 &= \left\{ \frac{V'''^2 \cdot E'''^2 - V'^2 \cdot E'^2}{P'''^2 \cdot M'''^2 - P'^2 \cdot E'^2} \right\}; \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; [125]$$

Eliminirt man auf gleiche Weise aus den Relationen [108] eine der drei Größen $E' E'' E'''$; so wird man Gleichungen bekommen, aus welchen für N^2 nachstehende Werthe folgen:

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= -\left\{ \frac{V''^2 \cdot E''^2 - V'''^2 \cdot E'''^2}{M'' \cdot E'' - M''' \cdot E'''} \right\}; \\ N^2 &= -\left\{ \frac{V'''^2 \cdot E'''^2 - V'^2 \cdot E'^2}{M''' \cdot E''' - M' \cdot E'} \right\}; \\ N^2 &= -\left\{ \frac{V'^2 \cdot E'^2 - V''^2 \cdot E''^2}{M' \cdot E' - M'' \cdot E''} \right\}; \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; [126]$$

Eliminirt man aus den Gleichungen [110], und zwar immer aus je zweien derselben eine der Größen V'^2, V''^2, V'''^2; so entspringen Gleichungen, aus welchen sich für N^2 nachstehende Werthe ergeben:

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= -\left\{\frac{V''^2 . E''^2 - V'''^2 . E'''^2}{V''^2 . P''^2 - V'''^2 . P'''^2}\right\}; \\ N^2 &= -\left\{\frac{V'''^2 . E'''^2 - V'^2 . E'^2}{V'''^2 . P'''^2 - V'^2 . P'^2}\right\}; \\ N^2 &= -\left\{\frac{V'^2 . E'^2 - V''^2 . E''^2}{V'^2 . P'^2 - V''^2 . P''^2}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [127]$$

Sucht man aus den Gleichungen [115] die Werthe der Größen $E' \cdot M'$, $E'' \cdot M''$, $E''' \cdot M'''$; so wird man finden:

$$\left.\begin{aligned} E' \cdot M' &= [\tfrac{1}{2} \cdot N^2 - \tfrac{1}{2} \cdot (P''^2 . V''^2 + P'''^2 . V'''^2 - P'^2 . V'^2)]; \\ E'' \cdot M'' &= [\tfrac{1}{2} \cdot N^2 - \tfrac{1}{2} \cdot (P'''^2 . V'''^2 + P'^2 . V'^2 - P''^2 . V''^2)]; \\ E''' \cdot M''' &= [\tfrac{1}{2} \cdot N^2 - \tfrac{1}{2} \cdot (P'^2 . V'^2 + P''^2 . V''^2 - P'''^2 . V'''^2)]; \end{aligned}\right\} \quad [128]$$

51. Aus den Systemen [103], [106], [108], [110] ergeben sich einige sehr merkwürdige Verhältnisse, die ihrer Einfachheit wegen angeführt zu werden verdienen. Die Gl. [103] geben zuerst:

$$\left.\begin{aligned} V'^2 . P'^2 &= (P'^2 . P''^2 . P'''^2 - P'^2 . M'^2); \text{ oder } P'^2 . P''^2 . P'''^2 = P'^2 . (V'^2 + M'^2); \\ V''^2 . P''^2 &= (P'^2 . P''^2 . P'''^2 - P''^2 . M''^2); \;.\;.\; P'^2 . P''^2 . P'''^2 = P''^2 . (V''^2 + M''^2); \\ V'''^2 . P'''^2 &= (P'^2 . P''^2 . P'''^2 - P'''^2 . M'''^2); \;.\;.\; P'^2 . P''^2 . P'''^2 = P'''^2 . (V'''^2 + M'''^2); \end{aligned}\right\}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(V'^2 + M'^2) : (V''^2 + M''^2) : (V'''^2 + M'''^2) = \frac{1}{P'^2} : \frac{1}{P''^2} : \frac{1}{P'''^2}; \quad . \quad . \quad . \quad [129]$$

Ferner geben die Gleichungen [106]:

$$\left.\begin{aligned} M' \cdot E' &= (M' \cdot M'' \cdot M''' - P'^2 \cdot M'^2); \text{ oder } M' \cdot M'' \cdot M''' = M' \cdot (E' + P'^2 \cdot M'); \\ M'' \cdot E'' &= (M' \cdot M'' \cdot M''' - P''^2 \cdot M''^2); \;.\;.\; M' \cdot M'' \cdot M''' = M'' \cdot (E'' + P''^2 \cdot M''); \\ M''' \cdot E''' &= (M' \cdot M'' \cdot M''' - P'''^2 \cdot M'''^2); \;.\;.\; M' \cdot M'' \cdot M''' = M''' \cdot (E''' + P'''^2 \cdot M'''); \end{aligned}\right\}$$

Hieraus folgt:

$$(E' + P'^2 \cdot M') : (E'' + P''^2 \cdot M'') : (E''' + P'''^2 \cdot M''') = \frac{1}{M'} : \frac{1}{M''} : \frac{1}{M'''}; \quad . \quad . \quad [130]$$

Die Gleichungen [108] geben uns weiter:

$$\left.\begin{aligned} N^2 . M' . E' &= (E' . E'' . E''' - E'^2 . V'^2); \text{ oder } E' . E'' . E''' = E' (N^2 . M' + V'^2 . E'); \\ N^2 . M'' . E'' &= (E' . E'' . E''' - E''^2 . V''^2); \;.\;.\; E' . E'' . E''' = E'' (N^2 . M'' + V''^2 . E''); \\ N^2 . M''' . E''' &= (E' . E'' . E''' - E'''^2 . V'''^2); \;.\;.\; E' . E'' . E''' = E''' (N^2 . M''' + V'''^2 . E'''); \end{aligned}\right\},$$

woraus:

$$(N^2 . M' + V'^2 . E') : (N^2 . M'' + V''^2 E'') : (N^2 . M''' + V'''^2 . E''') = \frac{1}{E} : \frac{1}{E'} : \frac{1}{E''} \quad . \quad . \quad . \quad [131]$$

folgt.

Die Gleichungen [110] geben endlich:

$$\left.\begin{aligned}N^2.P'^2.V'^2 &= (V'^2.V''^2.V'''^2 - V'^2.E'^2);\ \text{oder}\ V'^2.V''^2.V'''^2 = V'^2.(N^2.P'^2 + E'^2)\\ N^2.P''^2.V''^2 &= (V'^2.V''^2.V'''^2 - V''^2.E''^2);\ \cdot\ \cdot\ V'^2.V''^2.V'''^2 = V''^2.(N^2.P''^2 + E''^2)\\ N^2.P'''^2.V'''^2 &= (V'^2.V''^2.V'''^2 - V'''^2.E'''^2);\ \cdot\ \cdot\ V'^2.V''^2.V'''^2 = V'''^2.(N^2.P'''^2 + E'''^2)\end{aligned}\right\},$$

woraus folgt:

$$(N^2.P'^2 + E'^2) : (N^2.P''^2 + E''^2) : (N^2.P'''^2 + E'''^2) = \frac{1}{V'^2} : \frac{1}{V''^2} : \frac{1}{V'''^2}; \quad \cdot \quad \cdot \qquad [132]$$

III.

Zusammenstellung neuer formirter Ausdrücke.

---

52. Alle bisher gewonnenen Relationen sind von der Beschaffenheit, daß die beiden Theile ihrer Gleichungen auf eine rationale Weise aus den Größen A' B' C' A'' ... zusammengesetzt sind. Wie man sieht, so befinden sich von den Größen P $\mathfrak{P}$ V K nur die zweiten Potenzen in denselben, wodurch alle Irrationalität der Glieder vermieden wird. Wendet man aber diese Relationen in der Trigonometrie an, so wird man erfahren, daß sich alle Ausdrücke der trigonometrischen Größen als irrationale Functionen darstellen, wie wir dieß in der zweiten Abtheilung sehen werden. Wir haben daher, um unsere Theorie der Relationen vollständig zu machen, auch die Größen P, V in ihrer ersten Potenz in diese Relationen einzuführen nöthig, wozu wir abermals neuer Bezeichnungen bedürfen.

Schon die Relationen [105] und [112] geben uns einige merkwürdige Formen von Größen zu erkennen, in welchen P und V in der ersten Potenz erscheinen. Wir setzen daher:

$$\left.\begin{aligned}(P''.P''' + M') = \mu';\quad (P'.P''' + M'') = \mu'';\quad (P'.P'' + M''') = \mu''';\\ (P''.P''' - M') = \mu_,;\quad (P'.P''' - M'') = \mu_{,,};\quad (P'.P'' - M''') = \mu_{,,,};\end{aligned}\right\}\ [133]$$

$$\left.\begin{aligned}(V''.V''' + E') = \eta';\quad (V'.V''' + E'') = \eta'';\quad (V'.V'' + E''') = \eta''';\\ (V''.V''' - E') = \eta_,;\quad (V''.V''' - E') = \eta_{,,};\quad (V'.V'' - E''') = \eta_{,,,};\end{aligned}\right\}\ [134]$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke werden also die Relationen [105] und [112] werden:

$$\left.\begin{array}{l} V' = \sqrt{\mu'.\mu_{,}}\,; \quad V'' = \sqrt{\mu''.\mu_{,,}}\,; \quad V''' = \sqrt{\mu'''.\mu_{,,,}}\,; \\ N.P' = \sqrt{\eta'.\eta_{,}}\,; \; N.P'' = \sqrt{\eta''.\eta_{,,}}\,; \; N.P''' = \sqrt{\eta'''.\eta_{,,,}}\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad [135]$$

Wir werden ferner annehmen:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\eta''.\eta_{,,,}} + \sqrt{\eta'''.\eta_{,,}}}{2.V'.\sqrt{V''.V'''}} = s'\,; & \dfrac{\sqrt{\eta''.\eta_{,,,}} - \sqrt{\eta'''.\eta_{,,}}}{2.V'.\sqrt{V''.V'''}} = s_{,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\eta'''.\eta_{,}} + \sqrt{\eta'.\eta_{,,,}}}{2.V''.\sqrt{V'.V'''}} = s''\,; & \dfrac{\sqrt{\eta'''.\eta_{,}} - \sqrt{\eta'.\eta_{,,,}}}{2.V''.\sqrt{V'.V'''}} = s_{,,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\eta'.\eta_{,,}} + \sqrt{\eta''.\eta_{,}}}{2.V'''.\sqrt{V'.V''}} = s'''\,; & \dfrac{\sqrt{\eta'.\eta_{,,}} - \sqrt{\eta''.\eta_{,}}}{2\,V'''.\sqrt{V'.V''}} = s_{,,,}\,; \end{array}\right\} \quad [136]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\eta''.\eta'''} - \sqrt{\eta_{,,}.\eta_{,,,}}}{2\,V'.\sqrt{V''\,V'''}} = q'\,; & \dfrac{\sqrt{\eta''.\eta'''} + \sqrt{\eta_{,,}.\eta_{,,,}}}{2\,V'.\sqrt{V''.V'''}} = q_{,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\eta'.\eta'''} - \sqrt{\eta_{,}.\eta_{,,,}}}{2\,V''.\sqrt{V'.V'''}} = q''\,; & \dfrac{\sqrt{\eta'.\eta'''} + \sqrt{\eta_{,}.\eta_{,,,}}}{2\,V''.\sqrt{V'.V'''}} = q_{,,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\eta'\,\eta''} - \sqrt{\eta_{,}.\eta_{,,}}}{2\,V'''.\sqrt{V'.V''}} = q'''\,; & \dfrac{\sqrt{\eta'.\eta''} + \sqrt{\eta_{,}.\eta_{,,}}}{2\,V'''.\sqrt{V'.V''}} = q_{,,,}\,; \end{array}\right\} \quad [137]$$

Aehnliche Ausdrücke wollen wir aus den Größen:

$$\mu' \quad \mu'' \quad \mu''' \quad \mu_{,} \quad \mu_{,,} \quad \mu_{,,,}$$

construiren. Man setze also:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\mu''.\mu_{,,,}} + \sqrt{\mu'''.\mu_{,,}}}{2\,P'.\sqrt{P''.P'''}} = S'\,; & \dfrac{\sqrt{\mu''.\mu_{,,,}} - \sqrt{\mu'''.\mu_{,,}}}{2\,P'.\sqrt{P''.P'''}} = S_{,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\mu'''.\mu_{,}} + \sqrt{\mu'.\mu_{,,,}}}{2\,P''.\sqrt{P'.P'''}} = S''\,; & \dfrac{\sqrt{\mu'''.\mu_{,}} - \sqrt{\mu'.\mu_{,,,}}}{2\,P''.\sqrt{P'.P'''}} = S_{,,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\mu'.\mu_{,,}} + \sqrt{\mu''.\mu_{,}}}{2\,P'''.\sqrt{P'.P''}} = S'''\,; & \dfrac{\sqrt{\mu'.\mu_{,,}} - \sqrt{\mu''.\mu_{,}}}{2\,P'''.\sqrt{P'.P''}} = S_{,,,}\,; \end{array}\right\} \quad [138]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\mu''.\mu'''} - \sqrt{\mu_{,,}.\mu_{,,,}}}{2.\,P'.\sqrt{P''.P'''}} = Q'\,; & \dfrac{\sqrt{\mu''.\mu'''} + \sqrt{\mu_{,,}.\mu_{,,,}}}{2.\,P'.\sqrt{P''.P'''}} = Q_{,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\mu'.\mu'''} - \sqrt{\mu_{,}.\mu_{,,,}}}{2\,P''.\sqrt{P'.P'''}} = Q''\,; & \dfrac{\sqrt{\mu'.\mu'''} + \sqrt{\mu_{,}.\mu_{,,,}}}{2\,P''.\sqrt{P'.P'''}} = Q_{,,}\,; \\ \dfrac{\sqrt{\mu'.\mu''} - \sqrt{\mu_{,}.\mu_{,,}}}{2\,P'''.\sqrt{P'.P''}} = Q'''\,; & \dfrac{\sqrt{\mu'.\mu''} + \sqrt{\mu_{,}.\mu_{,,}}}{2\,P'''.\sqrt{P'.P''}} = Q_{,,,}\,; \end{array}\right\} \quad [139]$$

53. Aus den in den Systemen [136], [137], [138] und [139] enthaltenen Ausdrücken, und aus den Größen η μ werden wir noch folgende zusammensetzen:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{s'\cdot\sqrt{\eta'}+q'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{s''\cdot\sqrt{\eta''}+q''\cdot\sqrt{\eta_{,,}}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{s'''\cdot\sqrt{\eta'''}+q'''\cdot\sqrt{\eta_{,,,}}}{\sqrt{2V'V''}}=t;\\
\dfrac{s'\cdot\sqrt{\eta'}-q'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{q_{,,}\sqrt{\eta_{,,}}-s_{,,}\cdot\sqrt{\eta''}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{q_{,,,}\sqrt{\eta_{,,,}}+s_{,,,}\cdot\sqrt{\eta'''}}{\sqrt{2V'V''}}=t';\\
\dfrac{q_{,}\sqrt{\eta_{,}}+s_{,}\cdot\sqrt{\eta'}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{s''\cdot\sqrt{\eta''}-q''\cdot\sqrt{\eta_{,,}}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{q_{,,,}\sqrt{\eta_{,,,}}-s_{,,,}\cdot\sqrt{\eta'''}}{\sqrt{2V'V''}}=t'';\\
\dfrac{q_{,}\sqrt{\eta_{,}}-s_{,}\cdot\sqrt{\eta'}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{q_{,,}\sqrt{\eta_{,,}}+s_{,,}\cdot\sqrt{\eta''}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{s'''\cdot\sqrt{\eta'''}-q'''\cdot\sqrt{\eta_{,,,}}}{\sqrt{2V'V''}}=t''';
\end{array}\right\}\;[140]$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{q'\cdot\sqrt{\eta'}-s'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{q''\cdot\sqrt{\eta''}-s''\cdot\sqrt{\eta_{,,}}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{q'''\cdot\sqrt{\eta'''}-s'''\cdot\sqrt{\eta_{,,,}}}{\sqrt{2V'V''}}=r;\\
\dfrac{q'\cdot\sqrt{\eta'}+s'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{q_{,,}\sqrt{\eta''}+s_{,,}\cdot\sqrt{\eta_{,,}}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{q_{,,,}\sqrt{\eta'''}-s_{,,,}\cdot\sqrt{\eta_{,,,}}}{\sqrt{2V'V''}}=r';\\
\dfrac{q_{,}\sqrt{\eta'}-s_{,}\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{q''\cdot\sqrt{\eta''}+s''\cdot\sqrt{\eta_{,,}}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{q_{,,,}\sqrt{\eta'''}+s_{,,,}\cdot\sqrt{\eta_{,,,}}}{\sqrt{2V'V''}}=r'';\\
\dfrac{q_{,}\cdot\sqrt{\eta'}+s_{,}\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}=\dfrac{q_{,,}\cdot\sqrt{\eta''}-s_{,,}\cdot\sqrt{\eta_{,,}}}{\sqrt{2V'V'''}}=\dfrac{q'''\cdot\sqrt{\eta'''}+s'''\cdot\sqrt{\eta_{,,,}}}{\sqrt{2V'V''}}=r''';
\end{array}\right\}\;[141]$$

Die Identität je dreier dieser Ausdrücke in den Systemen [140] und [141] läßt sich durch Substitution der Werthe von $s\,q$ aus [136] und [137] sehr leicht darthun. Aehnliche Ausdrücke wollen wir aus $S\,Q$ und μ formiren. Es sei also:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{S'\cdot\sqrt{\mu'}+Q'\cdot\sqrt{\mu_{,}}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{S''\cdot\sqrt{\mu''}+Q''\cdot\sqrt{\mu_{,,}}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{S'''\cdot\sqrt{\mu'''}+Q'''\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}}{\sqrt{2P'P''}}=T\\
\dfrac{S'\cdot\sqrt{\mu'}-Q'\cdot\sqrt{\mu_{,}}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{Q_{,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,}}-S_{,,}\cdot\sqrt{\mu''}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{Q_{,,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}+S_{,,,}\cdot\sqrt{\mu'''}}{\sqrt{2P'P''}}=T'\\
\dfrac{Q_{,}\cdot\sqrt{\mu_{,}}+S_{,}\cdot\sqrt{\mu'}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{S''\cdot\sqrt{\mu''}-Q''\cdot\sqrt{\mu_{,,}}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{Q_{,,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}-S_{,,,}\cdot\sqrt{\mu'''}}{\sqrt{2P'P''}}=T''\\
\dfrac{Q_{,}\cdot\sqrt{\mu_{,}}-S_{,}\cdot\sqrt{\mu'}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{Q_{,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,}}+S_{,,}\cdot\sqrt{\mu''}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{S'''\cdot\sqrt{\mu'''}-Q'''\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}}{\sqrt{2P'P''}}=T'''
\end{array}\right\}\;[142]$$

Und endlich:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{Q'\cdot\sqrt{\mu'}-S'\cdot\sqrt{\mu_{,}}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{Q''\cdot\sqrt{\mu''}-S''\cdot\sqrt{\mu_{,,}}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{Q'''\cdot\sqrt{\mu'''}-S'''\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}}{\sqrt{2P'P''}}=R;\\
\dfrac{Q'\cdot\sqrt{\mu'}+S'\cdot\sqrt{\mu_{,}}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{Q_{,,}\cdot\sqrt{\mu''}+S_{,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,}}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{Q_{,,,}\cdot\sqrt{\mu'''}-S_{,,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}}{\sqrt{2P'P''}}=R';\\
\dfrac{Q_{,}\cdot\sqrt{\mu'}-S_{,}\cdot\sqrt{\mu_{,}}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{Q''\cdot\sqrt{\mu''}+S''\cdot\sqrt{\mu_{,,}}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{Q_{,,,}\cdot\sqrt{\mu'''}+S_{,,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}}{\sqrt{2P'P''}}=R'';\\
\dfrac{Q_{,}\cdot\sqrt{\mu'}+S_{,}\cdot\sqrt{\mu_{,}}}{\sqrt{2P''P'''}}=\dfrac{Q_{,,}\cdot\sqrt{\mu''}-S_{,,}\cdot\sqrt{\mu_{,,}}}{\sqrt{2P'P'''}}=\dfrac{Q'''\cdot\sqrt{\mu'''}+S'''\cdot\sqrt{\mu_{,,,}}}{\sqrt{2P'P''}}=R''';
\end{array}\right\}\;[143]$$

Alle diese Ausdrücke sind aus der Geometrie entlehnt, wie wir in der zweiten Abtheilung sehen werden; hier werden sie nur als merkwürdige Formen betrachtet, zwischen denen sehr wichtige Relationen Statt finden. Sie selbst sind mancherlei Umwandlungen fähig, von welchen wir die vorzüglichsten zuerst anzeigen wollen.

IV.

Relationen unter den formirten Ausdrücken.

---

54. Ein jeder der Ausdrücke der Systeme [136], [137], [138], [139] stellt sich unter der allgemeinen Form

$$[\sqrt{X} \pm \sqrt{Y}]$$

dar. Man weiß aber, daß:

$$[\sqrt{X} \pm \sqrt{Y}] = \sqrt{[\sqrt{X} \pm \sqrt{Y}]^2} = \sqrt{[(X+Y) \pm \sqrt{2\,XY}]}.$$

Wenden wir nun diese einfache Reductionsmethode bei den Ausdrücken der genannten vier Systeme an.

Der Ausdruck für s' wird geben:

$$s' = \frac{\sqrt{[\eta''.\,\eta_{'''} + \eta'''.\,\eta_{''} + 2.\,\sqrt{\eta''\eta_{''}.\,\eta'''\eta_{'''}}]}}{2V'.\,\sqrt{V''.V'''}}$$

Setzt man für η im rationalen Theile die Werthe aus [133], und unter dem Wurzelzeichen die aus [138]; so findet man nach einigen Reductionen:

$$s' = \frac{\sqrt{[V'^2.V''V''' - E''E''' + N^2.P''P''']}}{V'.\,\sqrt{2}\,V''.V'''}$$

Dieser Ausdruck kann noch weiter reducirt werden, indem man anstatt $E''.E'''$ den Werth aus [108] substituirt. Dadurch erhält man:

$$s' = \frac{\sqrt{[V'^2.V''V''' - E'.V'^2 - N^2.M' + N^2.P''P''']}}{V'.\,\sqrt{2\,V''.V'''}}$$

oder:

$$s' = \frac{\sqrt{[V'^2.\,(V''V''' - E') + N^2.\,(P''P''' - M')]}}{V'\,\sqrt{2\,V''V'''}},$$

oder endlich:

$$s' = \frac{\sqrt{(V'^2.\,\eta_{'} + N^2.\,\mu_{'})}}{V'.\,\sqrt{2V''V'''}}.$$

Auf diese Art können alle übrigen Ausdrücke reducirt werden, und man wird nun nachstehende Systeme erhalten:

$$\left.\begin{aligned} s' &= \frac{\sqrt{[V'^2 V'' V''' - E'' E''' + N^2 . P'' P''']}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}} = \frac{\sqrt{[V'^2 . \eta_, + N^2 . \mu_,]}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}}; \\ s'' &= \frac{\sqrt{[V' V''^2 V''' - E' E''' + N^2 . P' P''']}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}} = \frac{\sqrt{[V''^2 . \eta_{,,} + N^2 . \mu_{,,}]}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}}; \\ s''' &= \frac{\sqrt{[V' V'' V'''^2 - E' E'' + N^2 . P' P'']}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}} = \frac{\sqrt{[V'''^2 . \eta_{,,,} + N^2 . \mu_{,,,}]}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}}; \end{aligned}\right\} \quad [144]$$

$$\left.\begin{aligned} s_, &= \frac{\sqrt{[V'^2 V'' V''' - E'' E''' - N^2 . P'' P''']}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}} = \frac{\sqrt{[V'^2 . \eta_, - N^2 . \mu']}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}}; \\ s_{,,} &= \frac{\sqrt{[V' V''^2 V''' - E' E''' - N^2 . P' P''']}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}} = \frac{\sqrt{[V''^2 . \eta_{,,} - N^2 . \mu'']}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}}; \\ s_{,,,} &= \frac{\sqrt{[V' V'' V'''^2 - E' E'' - N^2 . P' P'']}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}} = \frac{\sqrt{[V'''^2 . \eta_{,,,} - N^2 . \mu''']}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}}; \end{aligned}\right\} \quad [145]$$

$$\left.\begin{aligned} q' &= \frac{\sqrt{[V'^2 V'' V''' + E'' E''' - N^2 . P'' P''']}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}} = \frac{\sqrt{[V'^2 . \eta' - N^2 . \mu_,]}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}}; \\ q'' &= \frac{\sqrt{[V' V''^2 V''' + E' E''' - N^2 . P' P''']}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}} = \frac{\sqrt{[V''^2 . \eta'' - N^2 . \mu_{,,}]}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}}; \\ q''' &= \frac{\sqrt{[V' V'' V'''^2 + E' E'' - N^2 . P' P'']}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}} = \frac{\sqrt{[V'''^2 . \eta''' - N^2 . \mu_{,,,}]}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}}; \end{aligned}\right\} \quad [146]$$

$$\left.\begin{aligned} q_, &= \frac{\sqrt{[V'^2 V'' V''' + E'' E''' + N^2 . P'' P''']}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}} = \frac{\sqrt{[V'^2 . \eta' + N^2 . \mu']}}{V' . \sqrt{2 V'' V'''}}; \\ q_{,,} &= \frac{\sqrt{[V' V''^2 V''' + E' E''' + N^2 . P' P''']}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}} = \frac{\sqrt{[V''^2 . \eta'' + N^2 . \mu'']}}{V'' . \sqrt{2 V' V'''}}; \\ q_{,,,} &= \frac{\sqrt{[V' V'' V'''^2 + E' E'' + N^2 . P' P'']}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}} = \frac{\sqrt{[V'''^2 . \eta''' + N^2 . \mu''']}}{V''' . \sqrt{2 V' V''}}; \end{aligned}\right\} \quad [147]$$

Der Ausdruck für S' gibt auf gleiche Weise:

$$S' = \frac{\sqrt{[\mu'' . \mu_{,,,} + \mu''' . \mu_{,,} + 2 . \sqrt{\mu'' \mu_{,,} . \mu''' \mu_{,,,}}]}}{2 P' . \sqrt{P'' P'''}}$$

Setzt man wieder für μ im rationalen Theile ihre Werthe aus [133], und unter dem Wurzelzeichen die aus [135]; so findet man:

$$S' = \frac{\sqrt{[P'^2 P'' P''' - M'' M''' + V'' V''']}}{P' . \sqrt{2 P'' P'''}}$$

Substituirt man für $M'' M'''$ dessen Werth aus [106]; so findet man:

$$S' = \frac{\sqrt{[P'^2 . (P'' P''' - M') + (V'' V''' - E')]}}{P' . \sqrt{2 P'' P'''}} = \frac{\sqrt{[P'^2 . \mu_, + \eta_,]}}{P' . \sqrt{2 P'' P'''}}.$$

Die übrigen Ausdrücke gestatten dieselbe Reduction. Man findet so die folgenden Systeme:

$$\left.\begin{aligned}
S' &= \frac{\sqrt{[P'^2 P'' P''' - M''M''' + V''V''']}}{P'.\sqrt{2P''P'''}} = \frac{\sqrt{[P'^2.\ \mu_{,} + \eta_{,}]}}{P'.\sqrt{2P''P'''}};\\
S'' &= \frac{\sqrt{[P' P''^2 P''' - M'M''' + V'V''']}}{P''.\sqrt{2P'P'''}} = \frac{\sqrt{[P''^2.\ \mu_{,,} + \eta_{,,}]}}{P''.\sqrt{2P'P'''}};\\
S''' &= \frac{\sqrt{[P' P'' P'''^2 - M'M'' + V'V'']}}{P'''.\sqrt{2P'P''}} = \frac{\sqrt{[P'''^2.\ \mu_{,,,} + \eta_{,,,}]}}{P'''.\sqrt{2P'P''}};
\end{aligned}\right\}[148]$$

$$\left.\begin{aligned}
S_{,} &= \frac{\sqrt{[P'^2 P'' P''' - M''M''' - V''V''']}}{P'.\sqrt{2P''P'''}} = \frac{\sqrt{[P'^2.\ \mu_{,} - \eta']}}{P'.\sqrt{2P''P'''}};\\
S_{,,} &= \frac{\sqrt{[P' P''^2 P''' - M'M''' - V'V''']}}{P''.\sqrt{2P'P'''}} = \frac{\sqrt{[P''^2.\ \mu_{,,} - \eta'']}}{P''.\sqrt{2P'P'''}};\\
S_{,,,} &= \frac{\sqrt{[P' P'' P'''^2 - M'M'' - V'V'']}}{P'''.\sqrt{2P'P''}} = \frac{\sqrt{[P'''^2.\ \mu_{,,,} - \eta''']}}{P'''.\sqrt{2P'P''}};
\end{aligned}\right\}[149]$$

$$\left.\begin{aligned}
Q' &= \frac{\sqrt{[P'^2 P'' P''' + M''M''' - V''V''']}}{P'.\sqrt{2P''P'''}} = \frac{\sqrt{[P'^2.\ \mu' - \eta_{,}]}}{P'.\sqrt{2P''P'''}};\\
Q'' &= \frac{\sqrt{[P' P''^2 P''' + M'M''' - V'V''']}}{P''.\sqrt{2P'P'''}} = \frac{\sqrt{[P''^2.\ \mu'' - \eta_{,,}]}}{P''.\sqrt{2P'P'''}};\\
Q''' &= \frac{\sqrt{[P' P'' P'''^2 + M'M'' - V'V'']}}{P'''.\sqrt{2P'P''}} = \frac{\sqrt{[P'''^2.\ \mu''' - \eta_{,,,}]}}{P'''.\sqrt{2P'P''}};
\end{aligned}\right\}[150]$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_{,} &= \frac{\sqrt{[P'^2 P'' P''' + M''M''' + V''V''']}}{P'.\sqrt{2P''P'''}} = \frac{\sqrt{[P'^2.\ \mu' + \eta']}}{P'.\sqrt{2P''P'''}};\\
Q_{,,} &= \frac{\sqrt{[P' P''^2 P''' + M'M''' + V'V''']}}{P''.\sqrt{2P'P'''}} = \frac{\sqrt{[P''^2.\ \mu'' + \eta'']}}{P''.\sqrt{2P'P'''}};\\
Q_{,,,} &= \frac{\sqrt{[P' P'' P'''^2 + M'M'' + V'V'']}}{P'''.\sqrt{2P'P''}} = \frac{\sqrt{[P'''^2.\ \mu''' + \eta''']}}{P'''.\sqrt{2P'P''}};
\end{aligned}\right\}[151]$$

55. Werden je zwei der Ausdrücke in den Systemen [136] .. [139] mit einander multiplicirt; so wird man nachstehende Resultate erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
s'.s_{,} &= \frac{E''V'' + E'''V'''}{2V'V''V'''};\quad s''.s_{,,} = \frac{E'''V''' - E'V'}{2V'V''V'''};\quad s'''.s_{,,,} = \frac{E'V' - E''V''}{2V'V''V'''};\\
q'.q_{,} &= \frac{E''V'' + E'''V'''}{2V'V''V'''};\quad q''.q_{,,} = \frac{E'''V''' + E'V'}{2V'V''V'''};\quad q'''.q_{,,,} = \frac{E'V' + E''V''}{2V'V''V'''};\\
s'.q_{,} &= \frac{N.(P''V'' + P'''V''')}{2V'V''V'''};\quad s''.q_{,,} = \frac{N.(P'''V''' + P'V')}{2V'V''V'''};\quad s'''.q_{,,,} = \frac{N.(P'V' + P''V'')}{2V'V''V'''};\\
s_{,}.q' &= \frac{N.(P'''V''' - P''.V'')}{2V'V''V'''};\quad s_{,,}.q'' = \frac{N.(P'V' - P'''V''')}{2V'V''V'''};\quad s_{,,,}.q''' = \frac{N.(P''V'' - P'V')}{2V'V''V'''};
\end{aligned}\right\}[152]$$

$$\left.\begin{array}{l} S'.S_{,} = \dfrac{M''P''-M'''P'''}{2P'P''P'''};\quad S''.S_{,,} = \dfrac{M'''P'''-M'P'}{2P'P''P'''};\quad S'''.S_{,,,} = \dfrac{M'P'-M''P''}{2P'P''P'''}; \\ Q'.Q_{,} = \dfrac{M''P''+M'''P'''}{2P'P''P'''};\quad Q''.Q_{,,} = \dfrac{M'''P'''+M'P'}{2P'P''P'''};\quad Q'''.Q_{,,,} = \dfrac{M'P'+M''P''}{2P'P''P'''}; \\ S'.Q_{,} = \dfrac{P''V''+P'''V'''}{2P'P''P'''};\quad S''.Q_{,,} = \dfrac{P'''V'''+P'V'}{2P'P''P'''};\quad S'''.Q_{,,,} = \dfrac{P'V'+P''V''}{2P'P''P'''}; \\ S_{,}.Q' = \dfrac{P'''V'''-P''V''}{2P'P''P'''};\quad S_{,,}.Q'' = \dfrac{P'V'-P'''V'''}{2P'P''P'''};\quad S_{,,,}.Q''' = \dfrac{P''V''-P'V'}{2P'P''P'''}; \end{array}\right\} \quad [153]$$

Werden je zwei der Ausdrücke [152] und [153], welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, durch einander dividirt; so wird man nachstehende erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s'}{q'} = N\cdot\left(\dfrac{V'''.P''' + V''.P''}{V'''.E''' + V''.E''}\right) = -\dfrac{1}{N}\cdot\left(\dfrac{V'''.E''' - V''.E''}{V'''.P''' - V''.P''}\right); \\ \dfrac{s''}{q''} = N\cdot\left(\dfrac{V'.P' + V'''.P'''}{V'.E' + V'''.E'''}\right) = -\dfrac{1}{N}\cdot\left(\dfrac{V'.E' - V'''.E'''}{V'.P' - V'''.P'''}\right); \\ \dfrac{s'''}{q'''} = N\cdot\left(\dfrac{V''.P'' + V'.P'}{V''.E'' + V'.E'}\right) = -\dfrac{1}{N}\cdot\left(\dfrac{V''.E'' - V'.E'}{V''.P'' - V'.P'}\right); \end{array}\right\} \quad [154]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s_{,}}{q_{,}} = N\cdot\left(\dfrac{V'''.P''' - V''.P''}{V'''.E''' + V''.E''}\right) = -\dfrac{1}{N}\cdot\left(\dfrac{V'''.E''' - V''.E''}{V'''.P''' + V''.P''}\right); \\ \dfrac{s_{,,}}{q_{,,}} = N\cdot\left(\dfrac{V'.P' - V'''.P'''}{V'.E' + V'''.E'''}\right) = -\dfrac{1}{N}\cdot\left(\dfrac{V'.E' - V'''.E'''}{V'.P' + V'''.P'''}\right); \\ \dfrac{s_{,,,}}{q_{,,,}} = N\cdot\left(\dfrac{V''.P'' - V'.P'}{V''.E'' + V'.E'}\right) = -\dfrac{1}{N}\cdot\left(\dfrac{V''.E'' - V'.E'}{V''.P'' + V'.P'}\right); \end{array}\right\} \quad [155]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S'}{Q'} = \dfrac{V'''P''' + V''P''}{M'''P''' + M''P''} = -\dfrac{M'''P''' - M''P''}{V'''P''' - V''P''}; \\ \dfrac{S''}{Q''} = \dfrac{V'P' + V'''P'''}{M'P' + M'''P'''} = -\dfrac{M'P' - M'''P'''}{V'P' - V'''P'''}; \\ \dfrac{S'''}{Q'''} = \dfrac{V''P'' + V'P'}{M''P'' + M'P'} = -\dfrac{M''P'' - M'P'}{V''P'' - V'P'}; \end{array}\right\} \quad \ldots \quad [156]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{,}}{Q_{,}} = \dfrac{V'''P''' - V''P''}{M'''P''' + M''P''} = -\dfrac{M'''P''' - M''P''}{V'''P''' + V''P''}; \\ \dfrac{S_{,,}}{Q_{,,}} = \dfrac{V'P' - V'''P'''}{M'P' + M'''P'''} = -\dfrac{M'P' - M'''P'''}{V'P' + V'''P'''}; \\ \dfrac{S_{,,,}}{Q_{,,,}} = \dfrac{V''P'' - V'P'}{M''P'' + M'P'} = -\dfrac{M''P'' - M'P'}{V''P'' + V'P'}; \end{array}\right\} \quad \ldots \quad [157]$$

56. Wir wollen itzt mit den Ausdrücken [144] · · [151] noch eine weitere Reduction vornehmen. Dividirt man im Ausdrucke:

$$\left(\frac{s_,}{S_,}\right) = \frac{P'. \sqrt{P'' P'''}}{V'. \sqrt{V'' V'''}} \cdot \sqrt{\left(\frac{V'^2. \eta_, - N^2. \mu'}{P'^2 \mu_, - \eta'}\right)},$$

den Zähler ($V'^2. \eta_, - N^2. \mu'$) durch den Nenner ($P'^2. \mu_, - \eta'$); so wird man als erstes Glied des Quotienten erhalten: $\left(\frac{V'^2. \eta_,}{P'^2. \mu_,}\right)$; und die Größe unter dem Wurzelzeichen wird seyn:

$$\left\{\left(\frac{V'^2. \eta_,}{P'^2. \mu_,}\right) + \frac{\left(\frac{V'^2. \eta_, \eta'}{P'^2. \mu_,}\right) - N^2. \mu'}{P'^2. \mu_, - \eta'}\right\}$$

Nun aber ist:

$$\frac{V'^2. \eta_, \eta'}{P'^2. \mu_,} = N^2. \mu';$$

folglich reducirt sich die Größe unter dem Wurzelzeichen im Ausdrucke für $\frac{s_,}{S_,}$ auf $\left(\frac{V'^2. \eta_,}{P'^2. \mu_,}\right)$.

Man erhält daher:

$$\left(\frac{s_,}{S_,}\right)^2 = \left(\frac{P'' P''' \eta_,}{V'' V''' \mu_,}\right)$$

Außer dieser Relation existiren noch eilf ähnliche, so daß man nachstehendes System von zwölf Relationen haben wird:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{s_,}{S_,} = - \sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_,}{V''V'''.\mu_,}\right)};\ \frac{s_{,,}}{S_{,,}} = - \sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{,,}}{V'V'''.\mu_{,,}}\right)};\ \frac{s_{,,,}}{S_{,,,}} = - \sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{,,,}}{V'V''.\mu_{,,,}}\right)}; \\
\frac{s'}{Q_,} = + \sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_,}{V''V'''.\mu'}\right)};\ \frac{s''}{Q_{,,}} = + \sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{,,}}{V'V'''.\mu''}\right)};\ \frac{s'''}{Q_{,,,}} = + \sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{,,,}}{V'V''.\mu'''}\right)}; \\
\frac{q_,}{S'} = + \sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta'}{V''V'''.\mu_,}\right)};\ \frac{q_{,,}}{S''} = + \sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta''}{V'V'''.\mu_{,,}}\right)};\ \frac{q_{,,,}}{S'''} = + \sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta'''}{V'V''.\mu_{,,,}}\right)}; \\
\frac{q'}{Q'} = - \sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta'}{V''V'''.\mu'}\right)};\ \frac{q''}{Q''} = - \sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta''}{V'V'''.\mu''}\right)};\ \frac{q'''}{Q'''} = - \sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta'''}{V'V''.\mu'''}\right)};
\end{array}\right\} [158]$$

Aus diesen Relationen gehen neue durch gegenseitige Division derselben hervor.

Man wird also sehr leicht nachstehendes System von Gleichungen ableiten:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{S_,}{Q_,}\right)\cdot\left(\frac{s'}{s_,}\right) = \left(\frac{S'}{Q'}\right)\cdot\left(\frac{q'}{q_,}\right) = -\sqrt{\left(\frac{\mu_,}{\mu'}\right)};\ \left(\frac{s_,}{q_,}\right)\cdot\left(\frac{S'}{S_,}\right) = \left(\frac{s'}{q'}\right)\left(\frac{Q'}{Q_,}\right) = -\sqrt{\left(\frac{\eta_,}{\eta'}\right)}; \\
\left(\frac{S_{,,}}{Q_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{s''}{s_{,,}}\right) = \left(\frac{S''}{Q''}\right)\cdot\left(\frac{q''}{q_{,,}}\right) = -\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}}{\mu''}\right)};\ \left(\frac{s_{,,}}{q_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{S''}{S_{,,}}\right) = \left(\frac{s''}{q''}\right)\left(\frac{Q''}{Q_{,,}}\right) = -\sqrt{\left(\frac{\eta_{,,}}{\eta''}\right)}; \\
\left(\frac{S_{,,,}}{Q_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{s'''}{s_{,,,}}\right) = \left(\frac{S'''}{Q'''}\right)\cdot\left(\frac{q'''}{q_{,,,}}\right) = -\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{\mu'''}\right)};\ \left(\frac{s_{,,,}}{q_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{S'''}{S_{,,,}}\right) = \left(\frac{s'''}{q'''}\right)\left(\frac{Q'''}{Q_{,,,}}\right) = -\sqrt{\left(\frac{\eta_{,,,}}{\eta'''}\right)};
\end{array}\right\} [159]$$

57. Wir wollen itzt die Ausdrücke für die Producte je zweier der Größen der Systeme [140], [141], [142] und [143] suchen.

Wenn man die Ausdrücke für t und t' des Systemes [140] mit einander multiplicirt; so wird man erhalten:

$$t\cdot t' = \frac{s'\cdot\sqrt{\eta'}+q'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2\,V''V'''}}\cdot\frac{s'\cdot\sqrt{\eta'}-q'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2\,V''V'''}} = \left(\frac{s'^2\cdot\eta'-q'^2\cdot\eta_{,}}{2\,V''V'''}\right).$$

Und eben so ist noch:

$$t\cdot t' = \left(\frac{s''^2\cdot\eta''-q''^2\cdot\eta_{,,}}{2\,V'V'''}\right) = \left(\frac{s'''^2\cdot\eta'''-q'''^2\cdot\eta_{,,,}}{2\,V'V''}\right).$$

Substituirt man in dem erstern der Ausdrücke für $t\cdot t'$ anstatt s' q' ihre Werthe aus [136]; so wird man nach geschehener Entwicklung erhalten:

$$t\cdot t' = \frac{1}{8\cdot V'^2V''^2V'''^2}\left\{\eta''\cdot(\eta'\cdot\eta_{,,,}-\eta'''\cdot\eta_{,})+\eta_{,,}\cdot(\eta'\cdot\eta'''-\eta_{,}\cdot\eta_{,,,})+2\cdot(\eta'+\eta_{,})\cdot\sqrt{\eta''\cdot\eta_{,,}\cdot\eta'''\,\eta_{,,,}}\right\}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für η die in [134] angenommenen Werthe in den rationalen Theil, und die Werthe aus [135] in den irrationalen Theil; so wird man endlich nach gehöriger Reduction dieses Ausdruckes erhalten:

$$t\cdot t' = \left\{\frac{E'V'^2-E''.E'''+N^2.P''P'''}{2\,V'^2.V''V'''}\right\}.$$

Bringt man endlich in diesen Ausdruck für $(E''E'''-E'\cdot V'^2)$ dessen Werth N^2M'; so erhält man endlich:

$$t\cdot t' = \frac{N^2.(P''P'''-M')}{2\,V'^2V''V'''} = \frac{N^2.\,\mu_{,}}{2\,V'^2V''V'''}.$$

Eben diesen Ausdruck erhält man aus den übrigen Ausdrücken für $t.\,t'$, wenn man sie auf gleiche Weise, wie diesen, behandelt:

Man wird so nachstehende Systeme von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
t'\cdot t &= \frac{N^2\cdot\mu_{,}}{2\,V'^2V''V'''};\quad t''\cdot t = \frac{N^2\cdot\mu_{,,}}{2\,V'V''^2V'''};\quad t'''\cdot t = \frac{N^2\cdot\mu_{,,,}}{2\,V'V''V'''^2};\\
t''\cdot t''' &= \frac{N^2\cdot\mu'}{2\,V'^2V''V'''};\quad t'\cdot t''' = \frac{N^2\cdot\mu''}{2\,V'V''^2V'''};\quad t'\cdot t'' = \frac{N^2\cdot\mu'''}{2\,V'V''V'''^2};
\end{aligned}\right\}\ [160]$$

$$\left.\begin{aligned}
T'\cdot T &= \frac{\eta_{,}}{2\,P'^2P''\,P'''};\quad T''\cdot T = \frac{\eta_{,,}}{2\,P'P''^2\,P'''};\quad T'''\cdot T = \frac{\eta_{,,,}}{2\,P'\,P''\,P'''^2};\\
T''\cdot T''' &= \frac{\eta'}{2\,P'^2\,P''\,P'''};\quad T'\cdot T''' = \frac{\eta''}{2\,P'\,P''^2\,P'''};\quad T'\cdot T'' = \frac{\eta'''}{2\,P'\,P''\,P'''^2};
\end{aligned}\right\}\ [160]^*$$

$$\left.\begin{aligned}
r'\cdot r &= \frac{2E'V'^2 - N^2\cdot\mu_,}{2V'^2V''V'''}; \quad r''\cdot r''' = \frac{2E'V'^2 + N^2\cdot\mu'}{2V'^2V''V'''};\\
r''\cdot r &= \frac{2E''V''^2 - N^2\cdot\mu_{,,}}{2V'V''^2V'''}; \quad r'\cdot r''' = \frac{2E''V''^2 + N^2\cdot\mu''}{2V'V''^2V'''};\\
r'''\cdot r &= \frac{2E'''V'''^2 - N^2\cdot\mu_{,,,}}{2V'V''V'''^2}; \quad r'\cdot r'' = \frac{2E'''V'''^2 + N^2\cdot\mu'''}{2V'V''V'''^2};
\end{aligned}\right\}\cdots [161]$$

$$\left.\begin{aligned}
R'\cdot R &= \frac{2M'P'^2 - \eta_,}{2P'^2P''P'''}; \quad R''\cdot R''' = \frac{2M'P'^2 + \eta'}{2P'^2P''P'''};\\
R''\cdot R &= \frac{2M''P''^2 - \eta_{,,}}{2P'P''^2P'''}; \quad R'\cdot R''' = \frac{2M''P''^2 + \eta''}{2P'P''^2P'''};\\
R'''\cdot R &= \frac{2M'''P'''^2 - \eta_{,,,}}{2P'P''P'''^2}; \quad R'\cdot R'' = \frac{2M'''P'''^2 + \eta'''}{2P'P''P'''^2};
\end{aligned}\right\}\cdots [162]$$

$$\left.\begin{aligned}
t\cdot r' &= \frac{N.(E''P''' + E'''.P'' + V'^2.P')}{2V'^2V''V'''}; \quad r\cdot t' = \frac{N.(E''P''' + E'''P'' - V'^2P')}{2V'^2V''V'''};\\
t\cdot r'' &= \frac{N.(E'P''' + E'''P' + V''^2.P'')}{2V'^2V''V'''}; \quad r\cdot t'' = \frac{N.(E'P''' + E'''P' - V''^2P'')}{2V'V''^2V'''};\\
t\cdot r''' &= \frac{N.(E'P'' + E''P' + V'''^2P''')}{2V'V''V'''^2}; \quad r\cdot t''' = \frac{N.(E'P'' + E''P' - V'''^2P''')}{2V'V''V'''^2};
\end{aligned}\right\} [163]$$

$$\left.\begin{aligned}
t''\cdot r''' &= \frac{N.(E''P''' - E'''P'' + V'^2P')}{2V'^2V''V'''}; \quad t'''\cdot r'' = \frac{N.(E'''P'' - E''P''' + V'^2P')}{2V'^2V''V'''};\\
t'''\cdot r' &= \frac{N.(E'''P' - E'P''' + V''^2P'')}{2V'^2V''V'''}; \quad t'\cdot r''' = \frac{N.(E'P''' - E'''P' + V''^2P'')}{2V'V''^2V'''};\\
t'\cdot r'' &= \frac{N.(E'P'' - E''P' + V'''^2P''')}{2V'^2V''V'''}; \quad t''\cdot r' = \frac{N.(E''P' - E'P'' + V'''^2P''')}{2V'V''V'''^2};
\end{aligned}\right\} [164]$$

$$\left.\begin{aligned}
T\cdot R' &= \frac{M''V''' + M'''V'' + V'.P'^2}{2P'^2P''P'''}; \quad R\cdot T' = \frac{M''V''' + M'''V'' - V'P'^2}{2P'^2P''P'''};\\
T\cdot R'' &= \frac{M'V''' + M'''V' + V''P''^2}{2P'P''^2P'''}; \quad R\cdot T'' = \frac{M'V''' + M'''V' - V''P''^2}{2P'P''^2P'''};\\
T\cdot R''' &= \frac{M'V'' + M''V' + V'''.P'''^2}{2P'P''P'''^2}; \quad R\cdot T''' = \frac{M'V'' + M''V' - V'''P'''^2}{2P'P''P'''^2};
\end{aligned}\right\} [165]$$

$$\left.\begin{aligned}
T''\cdot R''' &= \frac{M''V''' - M'''V'' + V'P'^2}{2P'^2P''P'''}; \quad R''.T''' = \frac{M'''V'' - M''.V''' + V'P'^2}{2P'^2P''P'''};\\
T'''\cdot R' &= \frac{M'''V' - M'V''' + V''P''^2}{2P'P''^2P'''}; \quad R'''\cdot T' = \frac{M'V''' - M'''.V' + V''P''^2}{2P'P''^2P'''};\\
T'\cdot R'' &= \frac{M'V'' - M''V' + V'''P'''^2}{2P'P''P'''^2}; \quad R'\cdot T'' = \frac{M''V' - M'.V'' + V'''P'''^2}{2P'P''P'''^2};
\end{aligned}\right\} [166]$$

58. Aus den Relationen [160] und [160]* kann man, da die Producte je zweier der Größen $t\ t'\ t''\ t'''$ bekannt sind, neue Ausdrücke für diese Größen selbst finden. Man erhält, nach vollzogener Rechnung, nachstehende Resultate:

$$\left.\begin{aligned}
t &= \frac{N}{V' V'' V'''} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot \mu_{,} \cdot \mu_{,,} \cdot \mu_{,,,}} = \frac{N}{\sqrt{2 \cdot \mu' \cdot \mu'' \cdot \mu'''}};\\
t' = \frac{N}{V'} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_{,}}{2 \cdot \mu_{,,} \cdot \mu_{,,,}}\right)};\ & t'' = \frac{N}{V''} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}}{2 \cdot \mu_{,} \cdot \mu_{,,,}}\right)};\ t''' = \frac{N}{V'''} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{2 \cdot \mu_{,} \cdot \mu_{,,}}\right)};
\end{aligned}\right\} \quad [167]$$

$$\left.\begin{aligned}
T &= \frac{1}{N \cdot P' P'' P'''} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot \eta_{,} \cdot \eta_{,,} \cdot \eta_{,,,}} = \frac{N^2}{\sqrt{2 \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta'''}};\\
T' = \frac{N}{P'} \cdot \sqrt{\left(\frac{\eta_{,}}{2\, \eta_{,,} \cdot \eta_{,,,}}\right)};\ & T'' = \frac{N}{P''} \cdot \sqrt{\left(\frac{\eta_{,,}}{2\, \eta_{,}\, \eta_{,,,}}\right)};\ T''' = \frac{N}{P'''} \cdot \sqrt{\left(\frac{\eta_{,,,}}{2\, \eta_{,}\, \eta_{,,}}\right)};
\end{aligned}\right\} \quad [168]$$

Hieraus erhält man ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{t''}{t'''} &= \left(\frac{V'''}{V''}\right) \cdot \left(\frac{\mu_{,,}}{\mu_{,,,}}\right) = \left(\frac{V''}{V'''}\right) \cdot \left(\frac{\mu'''}{\mu''}\right);\quad \frac{t'}{t} = \left(\frac{V'''}{V''}\right) \cdot \left(\frac{\mu''}{\mu_{,,,}}\right) = \left(\frac{V''}{V'''}\right) \cdot \left(\frac{\mu'''}{\mu_{,,}}\right);\\
\frac{t'''}{t'} &= \left(\frac{V'}{V'''}\right) \cdot \left(\frac{\mu_{,,,}}{\mu_{,}}\right) = \left(\frac{V'''}{V'}\right) \cdot \left(\frac{\mu'}{\mu'''}\right);\quad \frac{t''}{t} = \left(\frac{V'''}{V'}\right) \cdot \left(\frac{\mu'}{\mu_{,,,}}\right) = \left(\frac{V'}{V'''}\right) \cdot \left(\frac{\mu'''}{\mu_{,}}\right);\\
\frac{t'}{t''} &= \left(\frac{V''}{V'}\right) \cdot \left(\frac{\mu_{,}}{\mu_{,,}}\right) = \left(\frac{V'}{V''}\right) \cdot \left(\frac{\mu''}{\mu'}\right);\quad \frac{t'''}{t} = \left(\frac{V''}{V'}\right) \cdot \left(\frac{\mu'}{\mu_{,,}}\right) = \left(\frac{V'}{V''}\right) \cdot \left(\frac{\mu''}{\mu_{,}}\right);
\end{aligned}\right\} \quad [169]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{T^{n}}{T'''} &= \left(\frac{P'''}{P''}\right) \cdot \left(\frac{\eta_{,,}}{\eta_{,,,}}\right) = \left(\frac{P''}{P'''}\right) \cdot \left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right);\quad \frac{T'}{T} = \left(\frac{P'''}{P''}\right) \cdot \left(\frac{\eta''}{\eta_{,,,}}\right) = \left(\frac{P''}{P'''}\right) \cdot \left(\frac{\eta'''}{\eta_{,,}}\right);\\
\frac{T'''}{T'} &= \left(\frac{P'}{P'''}\right) \cdot \left(\frac{\eta_{,,,}}{\eta_{,}}\right) = \left(\frac{P'''}{P'}\right) \cdot \left(\frac{\eta'}{\eta'''}\right);\quad \frac{T''}{T} = \left(\frac{P'''}{P'}\right) \cdot \left(\frac{\eta'}{\eta_{,,,}}\right) = \left(\frac{P'}{P'''}\right) \cdot \left(\frac{\eta'''}{\eta_{,}}\right);\\
\frac{T'}{T''} &= \left(\frac{P''}{P'}\right) \cdot \left(\frac{\eta_{,}}{\eta_{,,}}\right) = \left(\frac{P'}{P''}\right) \cdot \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right);\quad \frac{T'''}{T} = \left(\frac{P''}{P'}\right) \cdot \left(\frac{\eta'}{\eta_{,,}}\right) = \left(\frac{P'}{P''}\right) \cdot \left(\frac{\eta''}{\eta_{+}}\right);
\end{aligned}\right\} \quad [170]$$

59. Suchen wir itzt die Ausdrücke, durch welche die Verhältnisse $\frac{t}{r}$, $\frac{T}{R}$ u. s. f. dargestellt werden können.

Dividirt man die Gleichung $t \cdot r' = \frac{N \cdot (E'' P''' + E'' P''' + V'^2 P')}{2 V'^2 V'' V'''}$ durch die Gleichung:

$$r \cdot r' = \frac{2\, E' V'^2 - N^2 \cdot \mu_{,}}{2 V'^2 V'' V'''};$$

so erhält man: $$\left(\frac{t \cdot r'}{r \cdot r'}\right) = \frac{t}{r} = \frac{N \cdot (E'' P''' + E''' P'' + V'^2 . P')}{2\, E' V'^2 - N^2 \cdot \mu_{,}}.$$

Eben so hätte man auch bekommen:

$$\left(\frac{t \cdot r''}{r \cdot r''}\right) = \frac{t}{r} = \frac{N \cdot (E' P''' + E''' P' + V''^2 . P'')}{2\, E'' V''^2 - N^2 \cdot \mu_{,,}},$$

und:
$$\left(\frac{t\cdot r'''}{r\cdot r'''}\right)=\frac{t}{r}=\frac{N\cdot(E'P''+E''P'+V'''^2.P''')}{2\,E'''V'''^2-N^2\cdot\mu_{,,,}}.$$

Bemerkt man ferner, daß:
$$(E''P'''+E'''P''+V'^2.P')\cdot(E''P'''+E'''P''-V'^2P')=\mu_{,}\cdot(2\,E'V'^2-N^2\cdot\mu_{,}),$$
welche Gleichung sich leicht durch Entwicklung und Reduction des Productes linker Hand des Gleichheitszeichens finden läßt; so wird aus dem für $\frac{t}{r}$ zuerst gefundenen Ausdruck noch werden:
$$\frac{t}{r}=\frac{N\cdot\mu_{,}}{E''P'''+E'''P''-V'^2.P'}.$$

Eben so findet man noch:
$$\frac{t}{r}=\frac{N\cdot\mu_{,,}}{E'P'''+E'''P'-V''^2P''};\quad\frac{t}{r}=\frac{N\cdot\mu_{,,,}}{E'P''+E''P'-V'''^2P'''}.$$

Behandelt man eben so die Ausdrücke für $\frac{t'}{r'}\cdots\frac{T}{R},\ \frac{T'}{R'}\cdots$; so wird man endlich nachstehende Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{t}{r}&=\frac{N\cdot\mu_{,}}{E''P'''+E'''P''-V'^2P'}=\frac{N\cdot\mu_{,,}}{E'P'''+E'''P'-V''^2P''}=\frac{N\cdot\mu_{,,,}}{E'P''+E''P'-V'''^2P'''};\\
\frac{t'}{r'}&=\frac{N\cdot\mu_{,}}{E''P'''+E'''P''+V'^2P'}=\frac{N\cdot\mu''}{E''P'-E'P'''+V''^2P''}=\frac{N\cdot\mu'''}{E''P'-E'P''+V'''^2P'''};\\
\frac{t''}{r''}&=\frac{N\cdot\mu'}{E'''P''-E''P'''+V'^2P'}=\frac{N\cdot\mu_{,,}}{E'P'''+E'''P'+V''^2P''}=\frac{N\cdot\mu_{,,,}}{E'P''-E''P'+V'''^2P'''};\\
\frac{t'''}{r'''}&=\frac{N\cdot\mu'}{E''P'''-E'''P''+V'^2P'}=\frac{N\cdot\mu''}{E'P'''-E'''P'+V''^2P''}=\frac{N\cdot\mu_{,,,}}{E'P''+E''P'+V'''^2P'''};
\end{aligned}\right\}\quad[171]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{T}{R}&=\frac{\eta_{,}}{M''V'''+M'''V''-V'P'^2}=\frac{\eta_{,,}}{M'V'''+M'''V'-V''P''^2}=\frac{\eta_{,,,}}{M'V''+M''V'-V'''P'''^2};\\
\frac{T'}{R'}&=\frac{\eta_{,}}{M''V'''+M'''V''+V'P'^2}=\frac{\eta''}{M'''V'-M'V'''+V''P''^2}=\frac{\eta'''}{M''V'-M'V''+V'''P'''^2};\\
\frac{T''}{R''}&=\frac{\eta'}{M'''V''-M''V'''+V'P'^2}=\frac{\eta_{,,}}{M'V'''+M'''V'+V''P''^2}=\frac{\eta'''}{M'V''-M''V'+V'''P'''^2};\\
\frac{T'''}{R'''}&=\frac{\eta'}{M''V'''-M'''V''+V'P'^2}=\frac{\eta''}{M'V'''-M'''V'+V''P''^2}=\frac{\eta_{,,,}}{M'V''+M''V'+V'''P'''^2};
\end{aligned}\right\}\quad[172]$$

60. Diese Ausdrücke für $\frac{t}{r}\cdot\cdot\frac{T}{R}\cdot\cdot$ sind noch mehr anderer, nicht minder wichtiger Umformungen fähig, welche hier noch angezeigt zu werden verdienen. Setzt man in $\frac{t}{r}$ für t und r ihre Werthe aus den Relationen [140] und [141]; so bekömmt man:

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{q'''\cdot\sqrt{\eta_{'''}} + s'''\cdot\sqrt{\eta'''}}{q'''\cdot\sqrt{\eta'''} - s'''\cdot\sqrt{\eta_{'''}}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{\eta_{'''}}{\eta'''}\right)} + \left(\frac{s'''}{q'''}\right)}{1 - \left(\frac{s'''}{q'''}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{\eta_{'''}}{\eta'''}\right)}}\right\}.$$

Substituirt man ferner für $\left(\frac{s'''}{q'''}\right)$ dessen Werth aus [159], nemlich:

$$\left(\frac{s'''}{q'''}\right) = -\left(\frac{Q_{'''}}{Q'''}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{\eta_{'''}}{\eta'''}\right)};$$

so wird man unmittelbar auf nachstehende Gleichung hingeleitet:

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{\left(1 - \frac{Q_{'''}}{Q'''}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{\eta_{'''}}{\eta'''}\right)}}{\left(1 + \frac{Q_{'''}\cdot\eta_{'''}}{Q'''\cdot\eta'''}\right)}\right\} = \left\{\frac{(Q''' - Q_{'''})\cdot\sqrt{\eta'''\cdot\eta_{'''}}}{Q'''\cdot\eta''' + Q_{'''}\cdot\eta_{'''}}\right\}$$

Setzt man ferner in diesem Ausdrucke für η die Werthe, welche sie gemäß [134] und [135] bedeuten; so erhält man endlich:

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{(Q''' - Q_{'''})\cdot N\cdot P'''}{(Q'''-Q_{'''}).E''' + (Q'''+Q_{'''}).V'V''}\right\} = \left\{\frac{N\cdot P'''}{E''' - \left(\frac{Q_{'''} + Q'''}{Q_{'''} - Q'''}\right)\cdot V'V''}\right\}$$

Nun folgt aus den Relationen [139]:

$$\left(\frac{Q_{'''} - Q'''}{Q_{'''} + Q'''}\right) = \left(\frac{\mu'\cdot\mu''}{V'.V''}\right);$$

Dadurch wird der letzthin für $\frac{t}{r}$ gefundene Ausdruck in folgenden übergehen:

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{N\cdot P'''}{E''' - \mu'\cdot\mu''}\right\}.$$

Man fände, durch dasselbe Verfahren, das hier angewandt worden ist, auch noch

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{N\cdot P''}{E'' - \mu'\cdot\mu'''}\right\};\quad \frac{t}{r} = \left\{\frac{N\cdot P'}{E' - \mu''\cdot\mu'''}\right\}.$$

Da sich ferner auch noch die übrigen Ausdrücke $\frac{t'}{r'}$ . . $\frac{T}{R}$, $\frac{T'}{R'}$ . . . in ähnlichen Formeln entwickeln lassen; so wird man nachfolgende Systeme von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{t}{r} &= \frac{N P'}{E' - \mu''\cdot\mu'''} = \frac{N P''}{E'' - \mu'\cdot\mu'''} = \frac{N P'''}{E''' - \mu'\cdot\mu''};\\
\frac{t'}{r'} &= \frac{-N P'}{E' - \mu_{''}\cdot\mu_{'''}} = \frac{N P''}{E'' + \mu'\cdot\mu_{'''}} = \frac{N P'''}{E''' + \mu'\cdot\mu_{''}};\\
\frac{t''}{r''} &= \frac{N P'}{E' + \mu''\cdot\mu_{'''}} = \frac{-N P''}{E'' - \mu_{'}\cdot\mu_{'''}} = \frac{-N P'''}{E''' + \mu''\cdot\mu_{'}};\\
\frac{t'''}{r'''} &= \frac{N P'}{E' + \mu'''\cdot\mu_{''}} = \frac{N P''}{E'' + \mu'''\cdot\mu_{'}} = \frac{-N P'''}{E''' - \mu_{'}\cdot\mu_{''}};
\end{aligned}\right\} \quad [173]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{T}{R} &= \frac{N^2 V'}{N^2 M' - \eta'' \eta'''} = \frac{N^2 V''}{N^2 M'' - \eta' \eta'''} = \frac{N^2 V'''}{N^2 M''' - \eta' \eta''};\\
\frac{T'}{R'} &= \frac{-N^2 V'}{N^2 M' - \eta_{\prime\prime} \eta_{\prime\prime\prime}} = \frac{N^2 V''}{N^2 M'' + \eta' \eta_{\prime\prime\prime}} = \frac{N^2 V'''}{N^2 M''' + \eta' \eta_{\prime\prime}};\\
\frac{T''}{R''} &= \frac{N^2 V'}{N^2 M' + \eta'' \eta_{\prime\prime\prime}} = \frac{-N^2 V''}{N^2 M'' - \eta_{\prime} \eta_{\prime\prime\prime}} = \frac{N^2 V'''}{N^2 M''' + \eta_{\prime} \eta''};\\
\frac{T'''}{R'''} &= \frac{N^2 V'}{N^2 M' + \eta''' \eta_{\prime\prime}} = \frac{N^2 V''}{N^2 M'' + \eta_{\prime} \eta'''} = \frac{-N^2 V'''}{N^2 M''' - \eta_{\prime} \eta_{\prime\prime}};
\end{aligned}\right\} \quad [174]$$

61. Die Gleichheit:

$$\left(\frac{N.\ P'}{E' - \mu''\,.\,\mu'''}\right) = \left(\frac{N.\ P''}{E'' - \mu'\,.\,\mu'''}\right)$$

gibt unmittelbar:

$$(E''\,P' - E'\,P'') = \mu'''\,.\,(P'\,\mu' - P''\,\mu'').$$

Eben so gibt die Gleichung:

$$\left(\frac{N.\ P'}{E' + \mu'''\,.\,\mu_{\prime\prime}}\right) = \left(\frac{N.\ P''}{E'' + \mu'''\,.\,\mu_{\prime}}\right),$$

entwickelt, diese:

$$(E''\,P' - E'\,P'') = \mu'''\,.\,(P''\,\mu_{\prime\prime} - P'\,\mu_{\prime});\ \text{u. s. w.}$$

Es verschaffen uns also die in den Systemen [173], [174] enthaltenen Relationen neue Gleichungen, die man in folgenden vier Systemen zusammengestellt findet:

$$\left.\begin{aligned}
E''\,P''' + E'''\,P'' &= \mu_{\prime}\,.\,(P'''\,\mu_{\prime\prime\prime} - P''\,\mu'') = \mu_{\prime}\,.\,(P''\,\mu_{\prime\prime} - P'''\,\mu''');\\
E'\,P''' + E'''\,P' &= \mu_{\prime\prime}\,.\,(P'''\,\mu_{\prime\prime\prime} - P'\,\mu') = \mu_{\prime\prime}\,.\,(P'\,\mu_{\prime} - P'''\,\mu''');\\
E''\,P' + E'\,P'' &= \mu_{\prime\prime\prime}\,.\,(P''\,\mu_{\prime\prime} - P'\,\mu') = \mu_{\prime\prime\prime}\,.\,(P'\,\mu_{\prime} - P''\,\mu'');
\end{aligned}\right\} \quad [175]$$

$$\left.\begin{aligned}
E''\,P''' - E'''\,P'' &= \mu'\,.\,(P''\,\mu_{\prime\prime} - P'''\,\mu_{\prime\prime\prime}) = \mu'\,.\,(P'''\,\mu''' - P''\,\mu'');\\
E'\,P''' - E'''\,P' &= \mu''\,.\,(P'\,\mu_{\prime} - P'''\,\mu_{\prime\prime\prime}) = \mu''\,.\,(P'''\,\mu''' - P'\,\mu');\\
E''\,P' - E'\,P'' &= \mu'''\,.\,(P''\,\mu_{\prime\prime} - P'\,\mu_{\prime}) = \mu'''\,.\,(P'\,\mu' - P''\,\mu'');
\end{aligned}\right\} \quad [176]$$

$$\left.\begin{aligned}
N^2.(M''\,V''' + M'''\,V'') &= \eta_{\prime}\,.\,(V'''\,\eta_{\prime\prime\prime} - V''\,\eta'') = \eta_{\prime}\,.\,(V''\,\eta_{\prime\prime} - V'''\,\eta''');\\
N^2.(M'\,V''' + M'''\,V') &= \eta_{\prime\prime}\,.\,(V'''\,\eta_{\prime\prime\prime} - V'\,\eta') = \eta_{\prime\prime}\,.\,(V'\,\eta_{\prime} - V'''\,\eta''');\\
N^2.(M''\,V' + M'\,V'') &= \eta_{\prime\prime\prime}\,.\,(V''\,\eta_{\prime\prime} - V'\,\eta') = \eta_{\prime\prime\prime}\,.\,(V'\,\eta_{\prime} - V''\,\eta'');
\end{aligned}\right\} \quad [177]$$

$$\left.\begin{aligned}
N^2.(M''\,V''' - M'''\,V'') &= \eta'\,.\,(V''\,\eta_{\prime\prime} - V'''\,\eta_{\prime\prime\prime}) = \eta'\,.\,(V'''\,\eta''' - V''\,\eta'');\\
N^2.(M'\,V''' - M'''\,V') &= \eta''\,.\,(V'\,\eta_{\prime} - V'''\,\eta_{\prime\prime\prime}) = \eta''\,.\,(V'''\,\eta''' - V'\,\eta');\\
N^2.(M''\,V' - M'\,V'') &= \eta'''\,.\,(V''\,\eta_{\prime\prime} - V'\,\eta_{\prime}) = \eta'''\,.\,(V'\,\eta' - V''\,\eta'');
\end{aligned}\right\} \quad [178]$$

62. Diese Ausdrücke für die Binomien $(E''\,P''' + E'''\,P'')$ u. s. w. lassen sich noch weiter zur Reduction der in den Systemen [171] und [172] enthaltenen Formeln benützen.

Es ist z. B., wenn man:

$$(E'' P''' + E''' P'') = \mu_, \cdot (P''' \cdot \mu_{,,,} - P'' \cdot \mu_{,,})$$

in den Ausdruck $\frac{t}{r} = \frac{N \cdot \mu_,}{(E'' P''' + E''' P'') - V^2 \cdot P'}$ setzt, offenbar:

$$\frac{t}{r} = \frac{N \cdot \mu_,}{\mu_, \cdot (P''' \cdot \mu_{,,,} - P'' \mu'') - \mu_, \cdot \mu' \cdot P'} = \left\{\frac{N}{P''' \cdot \mu_{,,,} - P'' \cdot \mu'' - P' \cdot \mu'}\right\}.$$

Eben so hätte man auch noch aus den beiden andern Ausdrücken erhalten:

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{N}{P'' \cdot \mu_{,,} - P''' \mu''' - P' \mu'}\right\}; \quad \frac{t}{r} = \left\{\frac{N}{P' \mu_, - P''' \mu''' - P'' \mu''}\right\}.$$

Die ähnliche Behandlung aller übrigen Ausdrücke wird uns daher geben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{t}{r} &= \left\{\frac{N}{P' \mu_, - P'' \mu'' - P''' \mu'''}\right\} = \left\{\frac{N}{P'' \mu_{,,} - P' \mu' - P''' \mu'''}\right\} = \left\{\frac{N}{P''' \mu_{,,,} - P' \mu' - P'' \mu''}\right\};\\
\frac{t'}{r'} &= \left\{\frac{N}{P'' \mu_{,,} + P''' \mu_{,,,} - P' \mu_,}\right\} = \left\{\frac{N}{P' \mu' + P'' \mu_{,,} - P''' \mu'''}\right\} = \left\{\frac{N}{P' \mu' - P'' \mu'' + P''' \mu_{,,,}}\right\};\\
\frac{t''}{r''} &= \left\{\frac{N}{P' \mu_, + P''' \mu_{,,,} - P'' \mu_{,,}}\right\} = \left\{\frac{N}{P'' \mu'' + P' \mu_, - P''' \mu'''}\right\} = \left\{\frac{N}{P'' \mu'' - P' \mu' + P''' \mu_{,,,}}\right\};\\
\frac{t'''}{r'''} &= \left\{\frac{N}{P' \mu_, + P'' \mu_{,,} - P''' \mu_{,,,}}\right\} = \left\{\frac{N}{P''' \mu''' + P' \mu_, - P'' \mu''}\right\} = \left\{\frac{N}{P''' \mu''' - P' \mu' + P'' \mu_{,,}}\right\};
\end{aligned}\right\} \quad [179]$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{T}{R} &= \left\{\frac{N^2}{V' \eta_, - V'' \eta'' - V''' \eta'''}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V'' \eta_{,,} - V' \eta' - V''' \eta'''}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V''' \eta_{,,,} - V' \eta' - V'' \eta''}\right\};\\
\frac{T'}{R'} &= \left\{\frac{N^2}{V'' \eta_{,,} + V''' \eta_{,,,} - V' \eta_,}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V' \eta' + V'' \eta_{,,} - V''' \eta'''}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V' \eta' - V'' \eta'' + V''' \eta_{,,,}}\right\};\\
\frac{T''}{R''} &= \left\{\frac{N^2}{V' \eta_, + V''' \eta_{,,,} - V'' \eta_{,,}}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V'' \eta'' + V' \eta_, - V''' \eta'''}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V'' \eta'' - V' \eta' + V''' \eta_{,,,}}\right\};\\
\frac{T'''}{R'''} &= \left\{\frac{N^2}{V' \eta_, + V'' \eta_{,,} - V''' \eta_{,,,}}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V''' \eta''' + V' \eta_, - V'' \eta''}\right\} = \left\{\frac{N^2}{V''' \eta''' - V' \eta' + V'' \eta_{,,}}\right\};
\end{aligned}\right\} \quad [180]$$

63. Die Gleichungen der Systeme [175], [176], [177] und [178] geben uns, wenn wir in den Binomien für $\eta\ \mu$ die Werthe aus [133] und [134] substituiren, noch nachstehende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
E'' P''' + E''' P'' &= -(P'' M'' + P''' M''') \cdot \mu_,;\\
E' P''' + E''' P' &= -(P''' M''' + P' M') \cdot \mu_{,,};\\
E'' P' + E' P'' &= -(P' M' + P'' M'') \cdot \mu_{,,,};
\end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad [181]$$

$$\left.\begin{aligned}
E'' P''' - E''' P'' &= +(P''' M''' - P'' M'') \cdot \mu';\\
E' P''' - E''' P' &= +(P''' M''' - P' M') \cdot \mu'';\\
E'' P' - E' P'' &= +(P' M' - P'' M'') \cdot \mu''';
\end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad [182]$$

$$\left.\begin{aligned} N^2\cdot(M''V''' + M'''V'') &= -(V''E'' + V'''E''').\eta_{,}\,;\\ N^2\cdot(M'V''' + M'''V') &= -(V'''E''' + V'E').\eta_{,,}\,;\\ N^2\cdot(M''V' + M'V'') &= -(V'E' + V''E'').\eta_{,,,}\,;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad[183]$$

$$\left.\begin{aligned} N^2\cdot(M''V''' - M'''V'') &= +(V'''E''' - V''E'').\eta'\,;\\ N^2\cdot(M'V''' - M'''V') &= +(V'''E''' - V'E').\eta''\,;\\ N^2\cdot(M''V' - M'V'') &= +(V'E' - V''E'').\eta'''\,;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad[184]$$

Diese Relationen verschaffen uns neuerdings Ausdrücke für die Verhältnisse $\frac{t}{r}$ u. s. w., wenn man sie in die Systeme [171] und [172] setzt.

Man erhält nemlich:

$$\frac{t}{r} = \frac{-N\cdot\mu_{,}}{(P''M'' + P'''M''')\cdot\mu_{,} + V'^2P'} = \frac{-N}{P''M'' + P'''M''' + \mu'\cdot P'},$$

oder:

$$\frac{t}{r} = \left\{\frac{-N}{P'\cdot M' + P''M'' + P'''M''' + P'P''P'''}\right\}$$

Daher entspringet aus [171] und [172] nachstehendes System:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t}{r} &= \left\{\frac{-N}{P'M' + P''M'' + P'''M''' + P'P''P'''}\right\};\ \frac{T}{R} = \left\{\frac{-N^2}{V'E' + V''E'' + V'''E''' + V'V''V'''}\right\};\\ \frac{t'}{r'} &= \left\{\frac{-N}{P''M'' + P'''M''' - P'M' - P'P''P'''}\right\};\ \frac{T'}{R'} = \left\{\frac{-N^2}{V''E'' + V'''E''' - V'E' - V'V''V'''}\right\};\\ \frac{t''}{r''} &= \left\{\frac{-N}{P'M' + P'''M''' - P''M'' - P'P''P'''}\right\};\ \frac{T''}{R''} = \left\{\frac{-N^2}{V'E' + V'''E''' - V''E'' - V'V''V'''}\right\};\\ \frac{t'''}{r'''} &= \left\{\frac{-N}{P'M' + P''M'' - P'''M''' - P'P''P'''}\right\};\ \frac{T'''}{R'''} = \left\{\frac{-N^2}{V'E' + V''E'' - V'''E''' - V'V''V'''}\right\};\end{aligned}\right\}[185]$$

64. Die Ausdrücke [140], [141], [142], [143] endlich lassen noch eine sehr merkwürdige Transformation zu, welche wir hier betrachten wollen, indem man nemlich, wie Art. 60, auch in die Ausdrücke [140] . . . die Werthe der kleinen Buchstaben durch die großen, und umgekehrt diese durch jene aus den Gleichungen [158] setzt. Ich will diese Art der Transformation nur an dem Ausdrucke für t zeigen. Es ist:

$$t = \left\{\frac{s'\cdot\sqrt{\eta'} + q'\cdot\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2V''V'''}}\right\},$$

und dieser Ausdruck geht, wenn man in ihm:

$$s' = Q_{,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''\eta_{,}}{V''V'''\mu'}\right)};\quad q' = -Q'\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''\eta'}{V''V'''\mu'}\right)}$$

setzt, offenbar in nachstehenden über:

$$t = \frac{(Q_{,} - Q')\cdot N\cdot P'}{V''V'''}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''}{2\mu'}\right)}.$$

Nun aber ist: $$(Q_{,} - Q') = \frac{\sqrt{\mu_{,,}\,\mu_{,,,}}}{P' \cdot \sqrt{P''\,P'''}};$$

folglich hat man: $$t = \frac{N}{V''V'''} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}\,\mu_{,,,}}{2\,\mu'}\right)} = \frac{N}{\sqrt{2.\,\mu'.\,\mu''.\,\mu'''}},$$

wie bereits bekannt ist.

Setzt man aber dieselben Werthe von s' q' in den Ausdruck:

$$r = \left\{\frac{q'.\,\sqrt{\eta'} - s'.\,\sqrt{\eta_{,}}}{\sqrt{2}\,V''V'''}\right\};$$

so wird er uns alsogleich geben:

$$r = -\left\{\frac{Q'.\,\eta' + Q_{,}.\,\eta_{,}}{V''V'''}\right\} \cdot \sqrt{\left(\frac{P''\,P'''}{2\,\mu'}\right)},$$

oder, wenn man für η' $\eta_{,}$ die dafür angenommenen Werthe substituirt:

$$r = \left\{(Q_{,} - Q') \cdot \frac{E'}{V''V'''} - (Q_{,} + Q'.)\right\} \cdot \sqrt{\left(\frac{P''\,P'''}{2\,\mu'}\right)}.$$

Aber da man hat: $$Q_{,} - Q' = \frac{\sqrt{\mu_{,,}.\,\mu_{,,,}}}{P'.\,\sqrt{P''\,P'''}};$$

und: $$Q_{,} + Q' = \frac{\sqrt{\mu''.\,\mu'''}}{P'.\,\sqrt{P''\,P'''}};$$

so gibt die Substitution dieser beiden Ausdrücke im Ausdrucke für r nach einigen Reductionen:

$$r = \left\{\frac{\frac{E'}{V''V'''} \cdot \sqrt{\mu_{,,}.\,\mu_{,,,}} - \sqrt{\mu''.\,\mu'''}}{P'.\,\sqrt{2\,\mu'}}\right\}.$$

Auf diese Weise können alle übrigen Ausdrücke behandelt werden. Da diese Reductionen, angewandt bei den Ausdrücken für die t und T, bereits bekannte Formeln zum Vorschein bringen; so hat man nur noch folgende:

$$\left.\begin{aligned}
r &= \left\{\frac{\frac{E'}{V''V'''}\cdot\sqrt{\mu_{,,}\mu_{,,,}} - \sqrt{\mu''\mu'''}}{P'.\,\sqrt{2\,\mu'}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E''}{V'\,V'''}\cdot\sqrt{\mu_{,}\mu_{,,,}} - \sqrt{\mu'\mu'''}}{P''.\,\sqrt{2\,\mu''}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E'''}{V'V''}\cdot\sqrt{\mu_{,}\mu_{,,}} - \sqrt{\mu'\mu''}}{P'''.\,\sqrt{2\,\mu'''}}\right\};\\
r' &= \left\{\frac{-\frac{E'}{V''V'''}\cdot\sqrt{\mu''\mu'''} + \sqrt{\mu_{,,}\mu_{,,,}}}{P'.\,\sqrt{2\,\mu'}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E''}{V'\,V'''}\cdot\sqrt{\mu_{,}\mu'''} + \sqrt{\mu'\mu_{,,,}}}{P''.\,\sqrt{2\,\mu_{,,}}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E'''}{V'\,V''}\cdot\sqrt{\mu_{,}\mu''} + \sqrt{\mu'\mu_{,,}}}{P'''.\,\sqrt{2\,\mu_{,,,}}}\right\};\\
r'' &= \left\{\frac{-\frac{E''}{V'V'''}\cdot\sqrt{\mu'\mu'''} + \sqrt{\mu_{,}\mu_{,,,}}}{P''.\,\sqrt{2\,\mu''}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E'}{V''V'''}\cdot\sqrt{\mu_{,,}\mu'''} + \sqrt{\mu''\mu_{,,,}}}{P'.\,\sqrt{2\,\mu_{,}}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E'''}{V'V''}\cdot\sqrt{\mu'\mu_{,,}} + \sqrt{\mu_{,}\mu''}}{P'''.\,\sqrt{2\,\mu_{,,,}}}\right\};\\
r''' &= \left\{\frac{-\frac{E'''}{V'V''}\cdot\sqrt{\mu'\mu''} + \sqrt{\mu_{,}\mu_{,,}}}{P'''.\,\sqrt{2\,\mu'''}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E'}{V''V'''}\cdot\sqrt{\mu_{,,,}\mu''} + \sqrt{\mu'''\mu_{,,}}}{P'.\,\sqrt{2\,\mu_{,}}}\right\} = \left\{\frac{\frac{E''}{V'V'''}\cdot\sqrt{\mu'\mu_{,,,}} + \sqrt{\mu_{,}\mu'''}}{P''.\,\sqrt{2\,\mu_{,,}}}\right\};
\end{aligned}\right\} \quad [186]$$

$$
\left.
\begin{aligned}
R &= \left\{\frac{\frac{M'}{P''P'''}\cdot\sqrt{\eta_{,,}\eta_{,,,}}-\sqrt{\eta''\eta'''}}{V'\cdot\sqrt{2\eta'}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M''}{P'P'''}\cdot\sqrt{\eta_{,}\eta_{,,,}}-\sqrt{\eta'\eta'''}}{V''\cdot\sqrt{2\eta''}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M'''}{P'P''}\cdot\sqrt{\eta_{,}\eta_{,,}}-\sqrt{\eta'\eta''}}{V'''\cdot\sqrt{2\eta'''}}\right\};\\
R' &= \left\{\frac{-\frac{M'}{P''P'''}\cdot\sqrt{\eta''\eta'''}+\sqrt{\eta_{,,}\eta_{,,,}}}{V'\cdot\sqrt{2\eta'}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M''}{P'P'''}\cdot\sqrt{\eta_{,}\eta'''}+\sqrt{\eta'\eta_{,,,}}}{V''\cdot\sqrt{2\eta_{,,}}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M'''}{P'P''}\cdot\sqrt{\eta_{,}\eta''}+\sqrt{\eta'\eta_{,,}}}{V'''\cdot\sqrt{2\eta_{,,,}}}\right\};\\
R'' &= \left\{\frac{-\frac{M''}{P'P'''}\cdot\sqrt{\eta'\eta'''}+\sqrt{\eta_{,}\eta_{,,,}}}{V''\cdot\sqrt{2\eta''}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M'}{P''P'''}\cdot\sqrt{\eta_{,,}\eta'''}+\sqrt{\eta''\eta_{,,,}}}{V'\cdot\sqrt{2\eta_{,}}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M'''}{P'P''}\cdot\sqrt{\eta'\eta_{,,}}+\sqrt{\eta''\eta_{,}}}{V'''\cdot\sqrt{2\eta_{,,,}}}\right\};\\
R''' &= \left\{\frac{-\frac{M'''}{P'P''}\cdot\sqrt{\eta'\eta''}+\sqrt{\eta_{,}\eta_{,,}}}{V'''\cdot\sqrt{2\eta'''}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M'}{P''P'''}\cdot\sqrt{\eta''\eta_{,,,}}+\sqrt{\eta'''\eta_{,,}}}{V'\cdot\sqrt{2\eta_{,}}}\right\} = \left\{\frac{\frac{M''}{P'P'''}\cdot\sqrt{\eta_{,,,}\eta'}+\sqrt{\eta'''\eta_{,}}}{V''\cdot\sqrt{2\eta_{,,}}}\right\};
\end{aligned}
\right\} \quad [187]
$$

Diese Relationen ließen sich noch um eine bedeutende Anzahl nicht minder interessanter vermehren. Indem ich mich begnüge, den Weg gezeigt zu haben, auf welchem man zu solchen Resultaten gelangen kann; werde ich sofort zu den weitern Anwendungen der hier entwickelten Relationen in der analytischen Geometrie schreiten.

Zweite Abtheilung.

Anwendung der Lagrange'schen Relationen zur Ableitung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

I.

Geometrische Bedeutungen der formirten Ausdrücke.

1. In Bezug auf alle von uns bisher entwickelten Relationen bemerke ich im Allgemeinen, daß sie in der That nichts anderes sind, als identische Gleichungen, oder daß sie sich durchgängig als solche Gleichungen erweisen, welche man zuletzt auf identische zurückführen kann. Eben diese Relationen aber finden in mehreren Theilen sowohl der Geometrie als Mechanik ihre Anwendung, und beurkunden sich daselbst als eine sehr ergiebige Quelle, aus welcher die interessantesten Entdeckungen fließen. Indem ich hier ihren Gebrauch zur Ableitung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie zeigen will, ist es vor allem Andern nothwendig, die geometrische Bedeutung der formirten Ausdrücke anzugeben, oder da alle formirten Ausdrücke doch zuletzt von den neun willkührlichen Größen $A' \; B' \; C' \; A'' \; B'' \; C'' \; A''' \; B''' \; C'''$ abhängen, so liegt es uns zuerst ob, festzusetzen, was wir uns hier unter diesen neun Größen vorzustellen haben.

Man denke sich nun ein System dreier rechtwinklicht coordinirter Achsen, gegen das die Lage eines Punctes im Raume durch die drei Coordinaten $x \; y \; z$ bestimmt werde, und durch den Anfangspunct der Coordinaten irgend eine Ebene gelegt. Man weiß, daß die Lage dieser Ebene gegen das Achsen-System durch eine Gleichung von der Form:

$$A.\, x + B.y + C.\, z = 0$$

bestimmt werde, und daß man alle Winkel, welche diese Ebene mit den coordinirten Ebenen sowohl, als auch mit andern der Lage nach bestimmten Geraden oder Ebenen macht, in gewissen Functionen der drei Größen A, B, C ausdrücken könne, wie dieß aus den Grundlehren der analytischen Geometrie bekannt ist.

Wir werden nun annehmen, daß $A' \; A'' \; A'''$ die Coëfficienten der Ordinate x, $B' \; B'' \; B'''$ die der Ordinate y, und endlich $C' \; C'' \; C'''$ die Coëfficienten der Ordinate z in den Gleichungen

dreier durch den Anfangspunct gelegten Ebenen seyen, welche wir respective mit *I, II, III* bezeichnen wollen, so daß:

$A' . x + B' . y + C' . z = 0$ die Gleichung der Ebene *I*

$A'' . x + B'' . y + C'' . z = 0$ . . . . *II*

$A''' . x + B''' . y + C''' . z = 0$ . . . . *III* sey.

Indem man die Winkel, welche eine Ebene mit den coordinirten Ebenen yz, xz, xy macht, auf die in der analytischen Geometrie übliche Art bezeichnet, wird man die Gleichungen der drei Ebenen *I, II, III* auch noch so schreiben können:

$$\left.\begin{array}{l} x . \cos(I.\ yz) + y . \cos(I.\ xz) + z . \cos(I.\ xy) = 0; \\ x . \cos(II.\ yz) + y . \cos(II.\ xz) + z . \cos(II.\ xy) = 0; \\ x . \cos(III.\ yz) + y . \cos(III.\ xz) + z . \cos(III.\ xy) = 0; \end{array}\right\}$$

Man kann also annehmen, daß die neun willkührlichen Größen $A' A'' \ldots$ die Cosinusse der Winkel seyen, welche die drei Ebenen *I, II, III* mit den coordinirten Ebenen yz, xz, xy machen.

Unter dieser letztern Voraussetzung wird man also haben:

$$\left.\begin{array}{l} A' = \cos(I.\ yz);\ B' = \cos(I.\ xz);\ C' = \cos(I.\ xy); \\ A'' = \cos(II.\ yz);\ B'' = \cos(II.\ xz);\ C'' = \cos(II.\ xy); \\ A''' = \cos(III.\ yz);\ B''' = \cos(III.\ xz);\ C''' = \cos(III.\ xy); \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad [I]$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß:

$$P' = 1; \quad P'' = 1; \quad P''' = 1.$$

2. Da sich je zwei jener drei Ebenen in einer Geraden durchschneiden (was hier vorausgesetzt wird), welche gleichfalls durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen; so wollen wir zunächst die Gleichungen dieser drei Geraden suchen. Die Durchschnittslinie der Ebenen *II* und *III* werde mit 1, jene der Ebenen *I* und *III* werde mit 2, endlich jene der Ebenen *I* und *II* mit 3 bezeichnet, so daß man außer dem Systeme der drei Ebenen *I, II, III* noch ein System dreier Geraden 1, 2, 3 hat, von denen immer zwei in einer der drei Ebenen liegen.

Drückt man aus den Gleichungen der Ebenen *II* und *III* die Größen y und z aus; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} y = \left\{\dfrac{A'''. C'' - A''. C'''}{B''. C''' - B'''. C''}\right\} . x; \\[2ex] z = \left\{\dfrac{A''. B''' - A'''. B''}{B''. C''' - B'''. C''}\right\} . x; \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} y = \left(\dfrac{B_{,}}{A_{,}}\right) . x; \\[2ex] z = \left(\dfrac{C_{,}}{A_{,}}\right) . x; \end{array}\right\}$$

und diese sind die Gleichungen der Geraden 1.

Auf dieselbe Weise findet man durch Vereinigung der Gleichungen der Ebenen *I* und *III* als Gleichungen ihrer Durchschnittslinie 2:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{B_{,,}}{A_{,,}}\right) \cdot x\,; \\ z &= \left(\frac{C_{,,}}{A_{,,}}\right) \cdot x\,; \end{aligned}\right\}$$

Endlich erhält man für die Gleichungen der Geraden 2, oder der Durchschnittslinie der Ebenen *I* und *II*, durch Vereinigung der Gleichungen dieser Ebenen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{B_{,,,}}{A_{,,,}}\right) \cdot x\,; \\ z &= \left(\frac{C_{,,,}}{A_{,,,}}\right) \cdot x\,; \end{aligned}\right\}$$

Man schließt hieraus, daß sich die drei Größen $A, B, C,$ eben so zu einander verhalten, wie die Cosinusse der Winkel, welche die Gerade 1 mit den coordinirten Achsen $x\ y\ z$ macht, u. s. w. Es ist also:

$$\left.\begin{array}{lll} A_{,} = V' . \cos(1.x)\,; & B_{,} = V' . \cos(1.y)\,; & C_{,} = V' . \cos(1.z)\,; \\ A_{,,} = V'' . \cos(2.x)\,; & B_{,,} = V'' . \cos(2.y)\,; & C_{,,} = V'' . \cos(2.z)\,; \\ A_{,,,} = V''' . \cos(3.x)\,; & B_{,,,} = V''' . \cos(3.y)\,; & C_{,,,} = V''' . \cos(3.z)\,; \end{array}\right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad [\mathrm{II}]$$

3. Da wir nun im Besitze der Gleichungen der drei Graden 1, 2, 3 sind, so wird es leicht seyn, die Ausdrücke zu finden, durch welche die Winkel sowohl dieser Geraden unter einander, als auch der Ebenen *I, II, III* gegen einander, zu bestimmen sind, indem man nur die allgemeinen Gleichungen, womit uns die analytische Geometrie versieht, auf die vorhandenen Fälle anzuwenden braucht. Diese Ausdrücke, welche an sich sehr einfach sind, findet man in nachstehender Tabelle zusammengestellt:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \cos(2.3) = \dfrac{E'}{V''.V'''} \cdot \cdot (1) & \sin(2.3) = \dfrac{N.P'}{V''.V'''} \cdot \cdot (4) & tg.(2.3) = \dfrac{N.P'}{E'} \cdot \cdot (7) \\ \cos(1.3) = \dfrac{E''}{V'.V'''} \cdot \cdot (2) & \sin(1.3) = \dfrac{N.P''}{V'.V'''} \cdot \cdot (5) & tg.(1.3) = \dfrac{N.P''}{E''} \cdot \cdot (8) \\ \cos(1.2) = \dfrac{E'''}{V'.V''} \cdot \cdot (3) & \sin(1.2) = \dfrac{N.P'''}{V'.V''} \cdot \cdot (6) & tg.(1.2) = \dfrac{N.P'''}{E'''} \cdot \cdot (9) \end{array}\right\} \cdot \quad [\mathrm{III}]$$

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \cos(II.III) = \dfrac{M'}{P''P'''} \cdot (10) & \sin(II.III) = \dfrac{V'}{P''P'''} \cdot (13) & tg.(II.III) = \dfrac{V'}{M'} \cdot (16) \\ \cos(I.\ III) = \dfrac{M''}{P'P'''} \cdot (11) & \sin(I.\ III) = \dfrac{V''}{P'P'''} \cdot (14) & tg.(I.\ III) = \dfrac{V''}{M''} \cdot (17) \\ \cos(I.\ II) = \dfrac{M'''}{P'P''} \cdot (12) & \sin(I.\ II) = \dfrac{V'''}{P'P''} \cdot (15) & tg.(I.\ II) = \dfrac{V'''}{M'''} \cdot (18) \end{array}\right\} \cdot \quad [\mathrm{IV}]$$

Aus diesen Gleichungen wird man nun sehr leicht die geometrischen Bedeutungen der mit ein, zwei, drei Strichen bezeichneten Größen $MEVN$ angeben können. Bezeichnet man, größerer Bequemlichkeit wegen, die trigonometrischen Größen durch die zur Seite gesetzten und eingeschlossenen Zahlen, so z. B. daß

$$(5) = sin\ (1.\ 3);\ (10) = cos\ (II.\ III);\ (18) = tg.\ (I.\ II),\ \text{u. s. w.}$$

so wird man, wegen $P' = P'' = P''' = 1$ haben:

$$\left.\begin{array}{llll} M' = (10); & V' = (13); & E' = (1)\ (14)\ (15); & N = (4)\ (14)\ (15); \\ M'' = (11); & V'' = (14); & E'' = (2)\ (13)\ (15); & N = (5)\ (13)\ (15); \\ M''' = (12); & V''' = (15); & E''' = (3)\ (13)\ (14); & N = (6)\ (13)\ (14); \end{array}\right\} \cdot [V]$$

Wie man sieht, sind die Größen $MEVN$ von der Lage der drei Ebenen gegen das coordinirte Achsen-System gänzlich unabhängig, und bloß Functionen von den Neigungswinkeln der drei Ebenen und ihrer Durchschnittslinien gegen einander. Alle in der vorhergehenden Abtheilung aufgefundenen und noch aufzufindenden Relationen zwischen den Größen $MVEN$ versehen uns also mit eben so vielen Relationen zwischen den Größen (1) · · · (18), wenn man in dieselben die so eben für sie erhaltenen Werthe aus [V] substituirt. Diese so angewandten und transformirten Relationen der ersten Abtheilung sind dann die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie. Hieraus läßt sich sehr leicht abnehmen, worauf sich die Entdeckung sämmtlicher Gleichungen der sphärischen Trigonometrie reducire.

4. Da sich die Ausdrücke, welche wir oben mit $\eta\,\mu$, mit $sqSQ$ und mit $trTR$ bezeichnet haben, aus $MVEN$ zusammengesetzt finden; so wird man ohne Schwierigkeit auch die Bedeutung dieser Größen angeben können.

Bringt man die eben angegebenen Werthe für MVE in die Ausdrücke [133] und [134]; so wird man, wenn man bemerkt, daß:

$$(1 + cos\ \varphi) = 2.\ cos^2\ \tfrac{1}{2}\ \varphi;\quad (1 - cos\ \varphi) = 2.\ sin^2\ \tfrac{1}{2}\ \varphi;$$

nachstehende Ausdrücke finden:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu' = 2.\ cos^2\ \tfrac{1}{2}\ (II.\ III); & \mu_{,} = 2.\ sin^2\ \tfrac{1}{2}\ (II.\ III); \\ \mu'' = 2.\ cos^2\ \tfrac{1}{2}\ (I.\ III); & \mu_{,,} = 2.\ sin^2\ \tfrac{1}{2}\ (I.\ III); \\ \mu''' = 2.\ cos^2\ \tfrac{1}{2}\ (I.\ II); & \mu_{,,,} = 2.\ sin^2\ \tfrac{1}{2}\ (I.\ II); \end{array}\right\} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ [VI]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \eta' = 2.\ (14)\ (15) \cdot cos^2\ \tfrac{1}{2}\ (2.\ 3); & \eta_{,} = 2.\ (14)\ (15) \cdot sin^2\ \tfrac{1}{2}\ (2.\ 3); \\ \eta'' = 2.\ (13)\ (15) \cdot cos^2\ \tfrac{1}{2}\ (1.\ 3); & \eta_{,,} = 2.\ (13)\ (15) \cdot sin^2\ \tfrac{1}{2}\ (1.\ 3); \\ \eta''' = 2.\ (13)\ (14) \cdot cos^2\ \tfrac{1}{2}\ (1.\ 2); & \eta_{,,,} = 2.\ (13)\ (14) \cdot sin^2\ \tfrac{1}{2}\ (1.\ 2); \end{array}\right\}\ [VII]$$

Bringt man ferner diese Werthe in die Ausdrücke [136], [137], [138] und [139], und reducirt sie gehörig; so findet man:

$$\left.\begin{array}{l}
s' = \sin\tfrac{1}{2}[(1.2)+(1.3)];\; s'' = \sin\tfrac{1}{2}[(2.3)+(1.2)];\; s''' = \sin\tfrac{1}{2}[(1.3)+(2.3)];\\
s_{,} = \sin\tfrac{1}{2}[(1.2)-(1.3)];\; s_{,,} = \sin\tfrac{1}{2}[(2.3)-(1.2)];\; s_{,,,} = \sin\tfrac{1}{2}[(1.3)-(2.3)];\\
q' = \cos\tfrac{1}{2}[(1.2)+(1.3)];\; q'' = \cos\tfrac{1}{2}[(2.3)+(1.2)];\; q''' = \cos\tfrac{1}{2}[(1.3)+(2.3)];\\
q_{,} = \cos\tfrac{1}{2}[(1.2)-(1.3)];\; q_{,,} = \cos\tfrac{1}{2}[(2.3)-(1.2)];\; q_{,,,} = \cos\tfrac{1}{2}[(1.3)-(2.3)];\\
S' = \sin\tfrac{1}{2}[(I.II)+(I.III)];\; S'' = \sin\tfrac{1}{2}[(II.III)+(I.II)];\; S''' = \sin\tfrac{1}{2}[(I.III)+(II.III)];\\
S_{,} = \sin\tfrac{1}{2}[(I.II)-(I.III)];\; S_{,,} = \sin\tfrac{1}{2}[(II.III)-(I.II)];\; S_{,,,} = \sin\tfrac{1}{2}[(I.III)-(II.III)];\\
Q' = \cos\tfrac{1}{2}[(I.II)+(I.III)];\; Q'' = \cos\tfrac{1}{2}[(II.III)+(I.II)];\; Q''' = \cos\tfrac{1}{2}[(I.III)+(II.III)];\\
Q_{,} = \cos\tfrac{1}{2}[(I.II)-(I.III)];\; Q_{,,} = \cos\tfrac{1}{2}[(II.III)-(I.II)];\; Q_{,,,} = \cos\tfrac{1}{2}[(I.III)-(II.III)];
\end{array}\right\}[VIII]$$

Setzt man diese Werthe sofort wieder in die Ausdrücke [140], [141], [142] und [143]; so zeigt die abermalige Reduction derselben nachstehende Bedeutungen von t und T, r und R:

$$\left.\begin{array}{l}
t\;\, = \sin\tfrac{1}{2}[(1.2)+(1.3)+(2.3)];\; r\;\, = \cos\tfrac{1}{2}[(1.2)+(1.3)+(2.3)];\\
t' = \sin\tfrac{1}{2}[(1.2)+(1.3)-(2.3)];\; r' = \cos\tfrac{1}{2}[(1.2)+(1.3)-(2.3)];\\
t'' = \sin\tfrac{1}{2}[(1.2)+(2.3)-(1.3)];\; r'' = \cos\tfrac{1}{2}[(1.2)+(2.3)-(1.3)];\\
t''' = \sin\tfrac{1}{2}[(1.3)+(2.3)-(1.2)];\; r''' = \cos\tfrac{1}{2}[(1.3)+(2.3)-(1.2)];\\
T\;\, = \sin\tfrac{1}{2}[(I.II)+(I.III)+(II.III)];\; R\;\, = \cos\tfrac{1}{2}[(I.II)+(I.III)+(II.III)];\\
T' = \sin\tfrac{1}{2}[(I.II)+(I.III)-(II.III)];\; R' = \cos\tfrac{1}{2}[(I.II)+(I.III)-(II.III)];\\
T'' = \sin\tfrac{1}{2}[(I.II)+(II.III)-(I.III)];\; R'' = \cos\tfrac{1}{2}[(I.II)+(II.III)-(I.III)];\\
T''' = \sin\tfrac{1}{2}[(I.III)+(II.III)-(I.II)];\; R''' = \cos\tfrac{1}{2}[(I.III)+(II.III)-(I.II)];
\end{array}\right\}[IX]$$

4. Da es in der Trigonometrie üblich ist, alle Winkel, welche Ebenen und gerade Linien im Raume mit einander machen, auf eine Kugeloberfläche zu beziehen; so wird es gut seyn, nebenbei auch noch die gewöhnlichen Bezeichnungen der in einem Systeme dreier, sich gegenseitig schneidender, Ebenen entspringenden Winkel einzuführen. Man denke sich also um den Anfangspunct der Coordinaten, welcher zugleich der gemeinschaftliche Durchschnittspunct aller drei Ebenen ist, eine Kugeloberfläche von irgend einem Halbmesser, welche von den Ebenen *I, II, III* in größten Kreisen, und von den Geraden 1, 2, 3 in Puncten, welche wir mit *A B C* bezeichnen wollen, getroffen werde. Auf dieser Kugelfläche entsteht nun ein Dreieck, dessen Seiten jene größten, zwischen je zweien der Durchschnittspuncte *A B C* liegenden Kreise sind. Bezeichnet man die sphärischen Winkel mit *A B C*, welche ihre Scheitel in den gleichnamigen Durchschnittspuncten haben, und die sphärischen Seiten mit *a, b, c*, welche diesen Winkeln respective gegenüber liegen;

so wird man, zur Umsetzung der erhaltenen Ausdrücke in die gewöhnlichen, den Principien der analytischen Geometrie gemäß, haben:

$$\left.\begin{array}{lll}(II.\,III) = A; & (I.\,III) = 180^\circ - B; & (I.\,II) = C; \\ (2.\,3) = 180^\circ - a; & (1.\,3) = b; & (1.\,2) = 180^\circ - c;\end{array}\right\} \text{[X]}$$

Diesem zu Folge hat man also:

$$\left.\begin{array}{lll}(1) = -\cos a; & (4) = +\sin a; & (7) = -tg.\,a; \\ (2) = +\cos b; & (5) = +\sin b; & (8) = +tg.\,b; \\ (3) = -\cos c; & (6) = +\sin c; & (9) = -tg.\,c;\end{array}\right\} \ldots\ldots \text{[XI]}$$

$$\left.\begin{array}{lll}(10) = +\cos A; & (13) = +\sin A; & (16) = +tg.\,A; \\ (11) = -\cos B; & (14) = +\sin B; & (17) = -tg.\,B; \\ (12) = +\cos C; & (15) = +\sin C; & (18) = +tg.\,C;\end{array}\right\} \ldots\ldots \text{[XII]}$$

$$\left.\begin{array}{llll}M' = +\cos A; & V' = +\sin A; & E' = -\cos a.\,\sin B.\,\sin C; & N = \sin a.\,\sin B.\,\sin C; \\ M'' = -\cos B; & V'' = +\sin B; & E'' = +\cos b.\,\sin A.\,\sin C; & N = \sin b.\,\sin A.\,\sin C; \\ M''' = +\cos C; & V''' = +\sin C; & E''' = -\cos c.\,\sin A.\,\sin B; & N = \sin c.\,\sin A.\,\sin B;\end{array}\right\} \text{[XIII]}$$

Die Ausdrücke [VI] und [VII] geben uns ferner:

$$\left.\begin{array}{lll}\mu' = 2.\,\cos^2 \tfrac{1}{2} A; & \mu'' = 2.\,\cos^2 \tfrac{1}{2} B; & \mu''' = 2.\,\cos^2 \tfrac{1}{2} C; \\ \mu_{,} = 2.\,\sin^2 \tfrac{1}{2} A; & \mu_{,,} = 2.\,\sin^2 \tfrac{1}{2} B; & \mu_{,,,} = 2.\,\sin^2 \tfrac{1}{2} C; \\ \eta' = 2.\,\sin^2 \tfrac{1}{2} a.\,\sin B.\,\sin C; & \eta_{,} = 2.\,\cos^2 \tfrac{1}{2} a.\,\sin B.\,\sin C; & \\ \eta'' = 2.\,\cos^2 \tfrac{1}{2} b.\,\sin A.\,\sin C; & \eta_{,,} = 2.\,\sin^2 \tfrac{1}{2} b.\,\sin A.\,\sin C; & \\ \eta''' = 2.\,\sin^2 \tfrac{1}{2} c.\,\sin A.\,\sin B; & \eta_{,,,} = 2.\,\cos^2 \tfrac{1}{2} c.\,\sin A.\,\sin B; & \end{array}\right\} \cdot \text{[XIV]}$$

Die Ausdrücke [VIII] gehen hierauf in nachstehende über:

$$\left.\begin{array}{lll}s' = \cos \tfrac{1}{2}(c-b); & s'' = \sin \tfrac{1}{2}(a+c); & s''' = \cos \tfrac{1}{2}(a-b); \\ s_{,} = \cos \tfrac{1}{2}(b+c); & s_{,,} = \sin \tfrac{1}{2}(c-a); & s_{,,,} = -\cos \tfrac{1}{2}(a+b); \\ q' = \sin \tfrac{1}{2}(c-b); & q'' = -\cos \tfrac{1}{2}(a+c); & q''' = \sin \tfrac{1}{2}(a-b); \\ q_{,} = +\sin \tfrac{1}{2}(b+c); & q_{,,} = \cos \tfrac{1}{2}(c-a); & q_{,,,} = \sin \tfrac{1}{2}(a+b); \\ S' = \cos \tfrac{1}{2}(B-C); & S'' = \sin \tfrac{1}{2}(A+C); & S''' = \cos \tfrac{1}{2}(B-A); \\ S_{,} = -\cos \tfrac{1}{2}(B+C); & S_{,,} = \sin \tfrac{1}{2}(A-C); & S_{,,,} = \cos \tfrac{1}{2}(B+A); \\ Q' = \sin \tfrac{1}{2}(B-C); & Q'' = \cos \tfrac{1}{2}(A+C); & Q''' = \sin \tfrac{1}{2}(B-A); \\ Q_{,} = \sin \tfrac{1}{2}(B+C); & Q_{,,} = \cos \tfrac{1}{2}(A-C); & Q_{,,,} = \sin \tfrac{1}{2}(B+A);\end{array}\right\} \cdot \text{[XV]}$$

Endlich erhält man aus den Ausdrücken [IX] noch die folgenden Werthe für $t\,r\,T\,R$ . .

$$\left.\begin{aligned}
t &= \sin\tfrac{1}{2}(a+c-b); & r &= -\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b);\\
t' &= \sin\tfrac{1}{2}(a+b-c); & r' &= +\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c);\\
t'' &= \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c); & r'' &= -\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c);\\
t''' &= \sin\tfrac{1}{2}(b+c-a); & r''' &= +\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a);\\
T &= \cos\tfrac{1}{2}(A+C-B); & R &= -\sin\tfrac{1}{2}(A+C-B);\\
T' &= \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C); & R' &= +\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C);\\
T'' &= -\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C); & R'' &= +\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C);\\
T''' &= +\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A); & R''' &= +\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [XVI]$$

Bringt man nun die Werthe von $MVEN$, $\eta\mu$, $sqSQ$, $trTR$ in die Relationen der ersten Abtheilung; so erhält man unmittelbar aus ihnen die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, wozu es also nur einer Uebersetzung der Bestandtheile dieser Relationen in ihre hier angegebene geometrische Bedeutung bedarf.

II.

Ableitung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

5. Der dreifache Ausdruck für N gibt uns zuerst nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin c.\ \sin B &= \sin b.\ \sin C;\\
\sin c.\ \sin A &= \sin a.\ \sin C;\\
\sin b.\ \sin A &= \sin a.\ \sin B;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [A]$$

Also ist: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C.$

Die Relationen [106] geben:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a.\ \sin B.\ \sin C &= \cos B.\ \cos C + \cos A;\\
\cos b.\ \sin A.\ \sin C &= \cos A.\ \cos C + \cos B;\\
\cos c.\ \sin A.\ \sin B &= \cos A.\ \cos C + \cos C;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [B]$$

Die Relationen [108] geben ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\cos A.\ \sin b.\ \sin c &= -\cos b.\ \cos c + \cos a;\\
\cos B.\ \sin a.\ \sin c &= -\cos a.\ \cos c + \cos b;\\
\cos C.\ \sin a.\ \sin b &= -\cos a.\ \cos b + \cos c;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [C]$$

Die Relationen [113] geben endlich:

$$\left.\begin{array}{l} \sin A.\ \cot B + \cos A.\ \cos c = \sin c.\ \cot b; \\ \sin A.\ \cot C + \cos A.\ \cos b = \sin b.\ \cot c; \\ \sin B.\ \cot A + \cos B.\ \cos c = \sin c.\ \cot a; \\ \sin B.\ \cot C + \cos B.\ \cos a = \sin a.\ \cot c; \\ \sin C.\ \cot A + \cos C.\ \cos b = \sin b.\ \cot a; \\ \sin C.\ \cot B + \cos C.\ \cos a = \sin a.\ \cot b; \end{array}\right\} \ldots\ldots [D]$$

Diese in den vier Systemen $[A]$ $[B]$ $[C]$ $[D]$ enthaltenen Gleichungen sind zugleich die fünfzehn Fundamental-Gleichungen der sphärischen Trigonometrie. Jede von ihnen ist eine Relation zwischen vier der sechs Stücke eines sphärischen Dreieckes (der drei Seiten a, b, c und der der drei Winkel A, B, C). Wenn sonach drei dieser Stücke bekannt sind, so werden die übrigen mit Hilfe dieser Gleichungen gefunden werden können.

6. Setzt man die Werthe für $M'\ M''\ M'''$ und $V'\ V''\ V'''$ in die erste und zweite der Relationen [117]; so wird man finden:

$$\Pi = (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C); \quad W = (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

Die Relationen [119] und [120] geben sodann:

$$\left.\begin{array}{l} N^2 = [1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 2.\ \cos A.\ \cos B.\ \cos C]; \\ \text{und:}\quad N^2 = [(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) - 2.\ (1 - \cos A.\ \cos B.\ \cos C)]; \end{array}\right\} \ldots [a]$$

Der zweite dieser Ausdrücke ist eine unmittelbare Folge vom ersten.

7. Aus den Relationen [158] folgen nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} = \dfrac{\cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} A}; \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)} = \dfrac{\cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A}; \\[2ex] \dfrac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B-C)} = \dfrac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} A}; \\[2ex] \dfrac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} = \dfrac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A}; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots [E]$$

Die acht übrigen Relationen des Systemes [158] liefern uns eben dieselben Gleichungen, welche aus den vorstehenden durch die Vertauschung der Buchstaben unmittelbar erhalten werden können. Die Gleichungen dieses Systemes sind unter der Benennung der Gaussischen Gleichungen in der sphärischen Trigonometrie bekannt.

Die Relationen [159] geben uns ferner:

$$\left.\begin{aligned}
tg.\,\tfrac{1}{2}(b+c) &= tg.\,\tfrac{1}{2}a.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)};\\
tg.\,\tfrac{1}{2}(b-c) &= tg.\,\tfrac{1}{2}a.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)};\\
tg.\,\tfrac{1}{2}(B+C) &= \cot\tfrac{1}{2}A.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)};\\
tg.\,\tfrac{1}{2}(B-C) &= \cot\tfrac{1}{2}A.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)};
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;[F]$$

Diese Gleichungen heißen, von ihrem Erfinder, die Neperischen. Sie dienen, um aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel in einem sphärischen Dreiecke die übrigen Stücke durch eine bequeme Rechnung zu finden. Durch Vertauschung der Buchstaben findet man noch die acht übrigen.

8. Die Relationen [167] und [168] geben ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) &= \sin a.\frac{\cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \sin b.\frac{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B} = \sin c.\frac{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C};\\
\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a) &= \sin a.\frac{\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \sin b.\frac{\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B} = \sin c.\frac{\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C};
\end{aligned}\right\}[G]$$

Durch Vertauschung der Buchstaben findet man hieraus auch noch unmittelbar die Ausdrücke für $\sin\frac{1}{2}(a+c-b)$ und $\sin\frac{1}{2}(a+b-c)$, so wie sie auch aus den übrigen Relationen des Systemes [167] gefunden werden können.

$$\left.\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) &= \sin A.\frac{\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} = \sin B.\frac{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b} = \sin C.\frac{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c};\\
\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A) &= \sin A.\frac{\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} = \sin B.\frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}b} = \sin C.\frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c};
\end{aligned}\right\}[H]$$

Die Ausdrücke für $\cos\frac{1}{2}(A+C-B)$ und $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)$ kann man auch hieraus durch Vertauschung der Buchstaben unmittelbar ableiten, so wie sie sich auch aus den übrigen Relationen des Systemes [168] ergeben.

9. Die Relationen [169] geben weiter:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} &= tg.\,\tfrac{1}{2}B.\,tg.\,\tfrac{1}{2}C;\\
\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} &= tg.\,\tfrac{1}{2}A.\,tg.\,\tfrac{1}{2}C;\\
\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)} &= tg.\,\tfrac{1}{2}A.\,tg.\,\tfrac{1}{2}B;
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;[J]$$

Hieraus folgt, daß:

$$tg.\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a) = tg.\tfrac{1}{2}B.\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b) = tg.\tfrac{1}{2}C.\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

oder daß:

$$\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a) : \sin\tfrac{1}{2}(a+c-b) : \sin\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \cot\tfrac{1}{2}A : \cot\tfrac{1}{2}B : \cot\tfrac{1}{2}C.$$

Die Relationen [170] geben eben so:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)} &= -\cot\tfrac{1}{2}b.\cot\tfrac{1}{2}c; \\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)} &= -\cot\tfrac{1}{2}a.\cot\tfrac{1}{2}c; \\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)} &= -\cot\tfrac{1}{2}a.\cot\tfrac{1}{2}b; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [K]$$

Hieraus folgt wieder:

$$\cot\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \cot\tfrac{1}{2}b.\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B) = \cot\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A) : \cos\tfrac{1}{2}(A+C-B) : \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = tg.\tfrac{1}{2}a : tg.\tfrac{1}{2}b : tg.\tfrac{1}{2}c.$$

10. Die Relationen [160] geben:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b.\sin c}\right\}}; \\ \cos\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b.\sin c}\right\}}; \\ tg.\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}\right\}}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [L]$$

Und:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\left\{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C).\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B.\sin C}\right\}}; \\ \cos\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\left\{\frac{+\cos\frac{1}{2}(A+B-C).\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B.\sin C}\right\}}; \\ tg.\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\left\{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C).\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C).\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}\right\}}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [M]$$

Durch Vertauschung der Buchstaben findet man die ähnlichen Ausdrücke zur Bestimmung der Winkel $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ und $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$.

Schreibt man der Kürze wegen:

$$k = \sqrt{+[\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c).\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a).\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b).\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)]};$$

$$K = \sqrt{-[\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C).\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A).\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B).\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)]};$$

so findet man hieraus, weil:

$$2.\ \sin \tfrac{1}{2} A.\ \cos \tfrac{1}{2} A = \sin A,$$

und:

$$2.\ \sin \tfrac{1}{2} a.\ \cos \tfrac{1}{2} a = \sin a,$$

aus den Gleichungen [L] und [M], so wie auch aus den Relationen [160] in Vereinigung mit den Relationen [167] und [168]:

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{2.\ k}{\sin b.\ \sin c}; \quad \sin a = \frac{2.\ K}{\sin B.\ \sin C}; \\ \sin B &= \frac{2.\ k}{\sin a.\ \sin c}; \quad \sin b = \frac{2.\ K}{\sin A.\ \sin C}; \\ \sin C &= \frac{2.\ k}{\sin a.\ \sin b}; \quad \sin c = \frac{2.\ K}{\sin A.\ \sin B}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [N]$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen [G], so reduciren sich dieselben auf nachstehende:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} (a + b + c) &= \frac{K}{2.\ \sin \frac{1}{2} A.\ \sin \frac{1}{2} B.\ \sin \frac{1}{2} C}; \\ \sin \tfrac{1}{2} (b + c - a) &= \frac{K}{2.\ \sin \frac{1}{2} A.\ \cos \frac{1}{2} B.\ \cos \frac{1}{2} C}; \\ \cos \tfrac{1}{2} (A + B + C) &= \frac{k}{2.\ \cos \frac{1}{2} a.\ \cos \frac{1}{2} b.\ \cos \frac{1}{2} c}; \\ \cos \tfrac{1}{2} (B + C - A) &= \frac{k}{2.\ \cos \frac{1}{2} a.\ \sin \frac{1}{2} b.\ \sin \frac{1}{2} c}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [O]$$

Aus diesen Gleichungen wird man, durch bloße Vertauschung der Buchstaben, noch acht ähnliche herleiten können.

Die Vergleichung der Relationen der Systeme [O] und [G] zeigt, daß:

$$N = 2.\ K,$$

was auch schon aus den Gleichungen des Systemes [N] folgt.

Die Gleichung [a] zeigt demnach, daß:

$$\left.\begin{aligned} k &= \tfrac{1}{2}.\ \sqrt{[1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2.\ \cos a.\ \cos b.\ \cos c]}, \\ \text{und:} \quad K &= \tfrac{1}{2}.\ \sqrt{[1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 2.\ \cos A.\ \cos B.\ \cos C]}; \end{aligned}\right\} \quad [b]$$

11. Die Relationen [186] und [187] versehen uns ferner mit nachstehenden trigonometrischen Gleichungen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c) &= \left(\frac{\cos a.\cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}\right)\\
&= \left(\frac{\cos b.\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B}\right)\\
&= \left(\frac{\cos c\,\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B - \sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}\right);\\
\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a) &= \left(\frac{-\cos a.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}\right)\\
&= \left(\frac{+\cos b.\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}C + \sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}\right)\\
&= \left(\frac{+\cos c.\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B + \sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}\right);
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots [P]
$$

Durch die Vertauschung der Buchstaben findet man noch ähnliche Ausdrücke für die Cosinusse der Winkel $\frac{1}{2}(a+c-b)$ und $\frac{1}{2}(a+b-c)$, so wie sie auch noch aus den übrigen Gleichungen des Systemes [186] hervorgehen.

Die Relationen [187] geben uns eben so:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C) &= \left(\frac{\cos A.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c + \cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\right)\\
&= \left(\frac{\cos B.\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}c + \cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b}\right)\\
&= \left(\frac{\cos C.\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\right);\\
\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A) &= \left(\frac{+\cos A.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\right)\\
&= \left(\frac{-\cos B.\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}c + \cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}b}\right)\\
&= \left(\frac{-\cos C.\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}\right);
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots [Q]
$$

Die übrigen Gleichungen, welche aus den Relationen [187] folgen, ergeben sich auch aus den vorstehenden durch bloße Vertauschung der Buchstaben.

12. Die Relationen [173] und [174] geben uns ferner:

$$\left.\begin{aligned}
tg.\tfrac{1}{2}(a+b+c) &= \frac{\sin a}{\cos a - tg.\tfrac{1}{2}B.\ tg.\tfrac{1}{2}C} \\
&= \frac{\sin b}{\cos b. - tg.\tfrac{1}{2}A.\ tg.\tfrac{1}{2}C} \\
&= \frac{\sin c}{\cos c - tg.\tfrac{1}{2}A.\ tg.\tfrac{1}{2}B}; \\
tg.\tfrac{1}{2}(b+c-a) &= \frac{-\sin a}{\cos a - \cot\tfrac{1}{2}B.\ \cot\tfrac{1}{2}C} \\
&= \frac{+\sin b}{\cos b + tg.\tfrac{1}{2}A.\ \cot\tfrac{1}{2}C} \\
&= \frac{+\sin c}{\cos c + tg.\tfrac{1}{2}A.\ \cot\tfrac{1}{2}B};
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [R]$$

$$\left.\begin{aligned}
tg.\tfrac{1}{2}(A+B+C) &= -\left(\frac{\cos A + \cot\tfrac{1}{2}b.\ \cot\tfrac{1}{2}c}{\sin A}\right) \\
&= -\left(\frac{\cos B + \cot\tfrac{1}{2}a.\ \cot\tfrac{1}{2}c}{\sin B}\right) \\
&= -\left(\frac{\cos C + \cot\tfrac{1}{2}a.\ \cot\tfrac{1}{2}b}{\sin C}\right); \\
tg.\tfrac{1}{2}(B+C-A) &= +\left(\frac{\cos A + tg.\tfrac{1}{2}b.\ tg.\tfrac{1}{2}c}{\sin A}\right) \\
&= -\left(\frac{\cos B - \cot\tfrac{1}{2}a.\ tg.\tfrac{1}{2}c}{\sin B}\right) \\
&= -\left(\frac{\cos C - \cot\tfrac{1}{2}a.\ tg.\tfrac{1}{2}b}{\sin C}\right);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [S]$$

13. Die Relationen [185] versehen uns mit nachstehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
tg.\tfrac{1}{2}(a+b+c) &= \frac{N}{\cos A + \cos B + \cos C - 1}; \\
tg.\tfrac{1}{2}(b+c-a) &= \frac{N}{\cos B + \cos C - \cos A + 1}; \\
tg.\tfrac{1}{2}(a+c-b) &= \frac{N}{\cos A + \cos C - \cos B + 1}; \\
tg.\tfrac{1}{2}(a+b-c) &= \frac{N}{\cos A + \cos B - \cos C + 1};
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [T]$$

Für die Größe N kann man entweder einen der drei Ausdrücke im Systeme [XIII], oder den Ausdruck $2\ k$ gebrauchen.

Ferner hat man:

$$
\left.\begin{aligned}
tg.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B+C) &= \frac{-2\,k}{\cos a + \cos b + \cos c + 1}\,;\\
tg.\,\tfrac{1}{2}\,(B+C-A) &= \frac{-2\,k}{\cos b + \cos c - \cos a - 1}\,;\\
tg.\,\tfrac{1}{2}\,(A+C-B) &= \frac{-2\,k}{\cos a + \cos c - \cos b - 1}\,;\\
tg.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B-C) &= \frac{-2\,k}{\cos a + \cos b - \cos c - 1}\,;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [T']
$$

14. Die Relationen [179] und [180] geben ferner:

$$
\left.\begin{aligned}
tg.\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c) &= \frac{\tfrac{1}{2}\,N}{\sin^2 \tfrac{1}{2} A + \sin^2 \tfrac{1}{2} B + \sin^2 \tfrac{1}{2} C - 1}\,;\\
tg.\,\tfrac{1}{2}\,(b+c-a) &= \frac{\tfrac{1}{2}\,N}{\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} B - \sin^2 \tfrac{1}{2} C + 1}\,;\\
\cot \tfrac{1}{2}\,(A+B+C) &= \frac{-\tfrac{1}{2}\,N^2}{\sin A.\,\sin B.\,\sin C.\,(\cos^2 \tfrac{1}{2} a + \cos^2 \tfrac{1}{2} b + \cos^2 \tfrac{1}{2} c - 1)}\,;\\
\cot \tfrac{1}{2}\,(B+C-A) &= \frac{\tfrac{1}{2}\,N^2}{\sin A.\,\sin B.\,\sin C.\,(\sin^2 \tfrac{1}{2} b + \sin^2 \tfrac{1}{2} c + \cos^2 \tfrac{1}{2} a - 1)}\,;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [U]
$$

Hieraus, und aus den Gleichungen [G] ergeben sich ferner:

$$
\left.\begin{aligned}
\cos \tfrac{1}{2}(a+b+c) &= \frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{4.\,\sin \tfrac{1}{2} A.\,\sin \tfrac{1}{2} B.\,\sin \tfrac{1}{2} C} = \frac{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} B - \sin^2 \tfrac{1}{2} C}{2.\,\sin \tfrac{1}{2} A.\,\sin \tfrac{1}{2} B.\,\sin \tfrac{1}{2} C}\,;\\
\cos \tfrac{1}{2}(b+c-a) &= \frac{\cos B + \cos C - \cos A + 1}{4.\,\sin \tfrac{1}{2} A.\,\cos \tfrac{1}{2} B.\,\cos \tfrac{1}{2} C} = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} B + \cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} A - 1}{2.\,\sin \tfrac{1}{2} A.\,\cos \tfrac{1}{2} B.\,\cos \tfrac{1}{2} C}\,;
\end{aligned}\right\} \quad [V]
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2}\,(A+B+C) &= \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} a + \cos^2 \tfrac{1}{2} b + \cos^2 \tfrac{1}{2} c - 1}{2.\,\cos \tfrac{1}{2} a.\,\cos \tfrac{1}{2} b.\,\cos \tfrac{1}{2} c}\\
&= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4.\,\cos \tfrac{1}{2} a.\,\cos \tfrac{1}{2} b.\,\cos \tfrac{1}{2} c}\,;\\
\sin \tfrac{1}{2}\,(B+C-A) &= \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} b + \sin^2 \tfrac{1}{2} c - 1}{2.\,\cos \tfrac{1}{2} a.\,\sin \tfrac{1}{2} b.\,\sin \tfrac{1}{2} c}\\
&= \frac{\cos a - \cos b - \cos c + 1}{4.\,\cos \tfrac{1}{2} a.\,\sin \tfrac{1}{2} b.\,\sin \tfrac{1}{2} c}\,;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [V']
$$

Durch Vertauschung der Buchstaben findet man aus den Gleichungen [V] und [V'] auch noch die Ausdrücke für die Cosinusse der Winkel $\tfrac{1}{2}\,(A+C-B)$ und $\tfrac{1}{2}\,(A+B-C)$.

Die bisher entwickelten Relationen zwischen den Sinussen, Cosinussen und Tangenten der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreieckes sind die vorzüglichsten Gleichungen der sphärischen

Trigonometrie. Das ganze Geschäft der Entdeckung dieser Gleichungen findet sich also darauf zurückgeführt, daß man entsprechende Relationen zwischen den in der vorigen Abtheilung formirten Ausdrücken suche, und in ihnen die Bedeutung derselben, so wie wir sie oben gefunden haben, substituire.

Diese Methode, durch welche wir alle Gleichungen der sphärischen Trigonometrie finden können, verbindet mit sich den so wichtigen Vortheil, daß alle diese Entwicklungen auf algebraische Rechnungen reducirt werden, wodurch sie eine größere Gleichförmigkeit und Präcision erlangen.

III.

Relationen zwischen den vierten Theilen der Winkel und Seiten eines sphärischen Dreieckes.

---

15. Auch unter den vierten Theilen der Winkel und Seiten eines sphärischen Dreieckes bestehen merkwürdige Relationen, welche wir hier noch entwickeln wollen. Die in der vorhergehenden Abtheilung bekannt gewordenen Relationen versehen uns wieder mit allen den Hilfsmitteln, zu jenen Relationen zu gelangen. Hiezu bedürfen wir aber noch einiger Abkürzungen. Setzen wir nun:

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin \tfrac{1}{4}\,[(1.2)+(1.3)+(2.3)] = t_0\,; & \cos \tfrac{1}{4}\,[(1.2)+(1.3)+(2.3)] = r_0\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}\,[(1.2)+(1.3)-(2.3)] = t_{,}\,; & \cos \tfrac{1}{4}\,[(1.2)+(1.3)-(2.3)] = r_{,}\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}\,[(1.2)+(2.3)-(1.3)] = t_{,,}\,; & \cos \tfrac{1}{4}\,[(1.2)+(2.3)-(1.3)] = r_{,,}\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}\,[(1.3)+(2.3)-(1.2)] = t_{,,,}\,; & \cos \tfrac{1}{4}\,[(1.3)+(2.3)-(1.2)] = r_{,,,}\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}[(I.\,II)+(I.\,III)+(II.\,III)]=T_0\,; & \cos \tfrac{1}{4}[(I.\,II)+(I.\,III)+(II.\,III)]=R_0\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}[(I.\,II)+(I.\,III)-(II.\,III)]=T_{,}\,; & \cos \tfrac{1}{4}[(I.\,II)+(I.\,III)-(II.\,III)]=R_{,}\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}[(I.\,II)+(II.\,III)-(I.\,III)]=T_{,,}\,; & \cos \tfrac{1}{4}[(I.\,II)+(II.\,III)-(I.\,III)]=R_{,,}\,;\\
\sin \tfrac{1}{4}[(I.\,III)+(II.\,III)-(I.\,II)]=T_{,,,}\,; & \cos \tfrac{1}{4}[(I.\,III)+[II.\,III)-(I.\,II)]=R_{,,,}\,;
\end{array}\right\}\ [XVII]$$

Nun hat man überhaupt:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin\varphi.\ \cos\psi = \tfrac{1}{2}.\ [\sin(\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)]\,;\\
\cos\varphi.\ \cos\psi = \tfrac{1}{2}.\ [\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)]\,;\\
\sin\varphi.\ \sin\psi = \tfrac{1}{2}.\ [\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)]\,;
\end{array}\right\}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen, womit uns die Goniometrie versieht, wird man nun sehr leicht die Producte aus je zweien der Ausdrücke [XVII] finden.

So z. B. ist: $$t_0 . t_{,} = \tfrac{1}{2} . \left\{ \sqrt{\left(\frac{\eta'}{2 V'' V'''} \right)} - q' \right\}.$$

Setzt man, zur Transformation dieses Ausdruckes, weiter:

$$q' = - Q' . \sqrt{\left(\frac{P'' P''' . \eta'}{V'' V''' \mu'} \right)},$$

aus den Relationen [159]; so findet man:

$$t_0 . t_{,} = \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\mu'}{2 P'' P'''}} + Q' \right\} . \sqrt{\left(\frac{P'' P''' . \eta'}{V'' V''' . \mu'} \right)}$$

Oder endlich, da auch:

$$R_0 . R_{,} = \tfrac{1}{2} . \left\{ \sqrt{\frac{\mu'}{2 P'' P'''}} + Q' \right\};$$

so erhält man endlich: $$t_0 . t_{,} = R_0 . R_{,} . \sqrt{\left(\frac{P'' . P''' . \eta'}{V'' . V''' . \mu'} \right)}.$$

Auf diese Art gelangt man nun zu nachstehenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
t_0 . t_{,} &= \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\eta'}{2 V'' V'''} \right)} - q' \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mu'}{2 P'' P'''} \right)} + Q' \right\} . \sqrt{\left(\frac{P'' P''' . \eta'}{V'' V''' . \mu'} \right)} = R_0 . R_{,} . \sqrt{\left(\frac{P'' P''' . \eta'}{V'' V''' . \mu'} \right)}; \\
t_0 . t_{,,} &= \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\eta''}{2 V' V'''} \right)} - q'' \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mu''}{2 P' P'''} \right)} + Q'' \right\} . \sqrt{\left(\frac{P' P''' . \eta''}{V' V''' . \mu''} \right)} = R_0 . R_{,,} . \sqrt{\left(\frac{P' P''' . \eta''}{V' V''' . \mu''} \right)}; \\
t_0 . t_{,,,} &= \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\eta'''}{2 V' V''} \right)} - q''' \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mu'''}{2 P' P''} \right)} + Q''' \right\} . \sqrt{\left(\frac{P' P'' . \eta'''}{V' V'' . \mu'''} \right)} = R_0 . R_{,,,} . \sqrt{\left(\frac{P' P'' . \eta'''}{V' V'' . \mu'''} \right)}; \\
t_{,,} . t_{,,,} &= \tfrac{1}{2} \left\{ q_{,} - \sqrt{\left(\frac{\eta'}{2 V'' V'''} \right)} \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ S' - \sqrt{\left(\frac{\mu_{,}}{2 P'' P'''} \right)} \right\} . \sqrt{\left(\frac{P'' P''' . \eta'}{V'' V''' . \mu_{,}} \right)} = R_0 . T_{,} . \sqrt{\left(\frac{P'' P''' . \eta'}{V'' V''' . \mu_{,}} \right)}; \\
t_{,} . t_{,,,} &= \tfrac{1}{2} \left\{ q_{,,} - \sqrt{\left(\frac{\eta''}{2 V' V'''} \right)} \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ S'' - \sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}}{2 P' P'''} \right)} \right\} . \sqrt{\left(\frac{P' P''' . \eta''}{V' V''' . \mu_{,,}} \right)} = R_0 . T_{,,} . \sqrt{\left(\frac{P' P''' . \eta''}{V' V''' . \mu_{,,}} \right)}; \\
t_{,} . t_{,,} &= \tfrac{1}{2} \left\{ q_{,,,} - \sqrt{\left(\frac{\eta'''}{2 V' V''} \right)} \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ S''' - \sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{2 P' P''} \right)} \right\} . \sqrt{\left(\frac{P' P'' . \eta'''}{V' V'' . \mu_{,,,}} \right)} = R_0 . T_{,,,} . \sqrt{\left(\frac{P' P'' . \eta'''}{V' V'' . \mu_{,,,}} \right)};
\end{aligned}\right\} \text{[XVIII]}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
r_{0}.\, r_{,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta'}{2V''V'''}\right)} + q'\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu'}{2P''P'''}\right)} - Q'\right\}.\, \sqrt{\left(\frac{P''P'''.\,\eta'}{V''V'''.\,\mu'}\right)} = T_{0}.\; T_{,}\,.\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\,\eta'}{V''V'''.\,\mu'}\right)}; \\
r_{0}.\, r_{,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta''}{2V'V'''}\right)} + q''\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu''}{2P'P'''}\right)} - Q''\right\}.\, \sqrt{\left(\frac{P'P'''.\,\eta''}{V'V'''.\,\mu''}\right)} = T_{0}.\; T_{,,}\,.\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\,\eta''}{V'V'''.\,\mu''}\right)}; \\
r_{0}.\, r_{,,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta'''}{2V'V''}\right)} + q'''\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu'''}{2P'P''}\right)} - Q'''\right\}.\, \sqrt{\left(\frac{P'P''.\,\eta'''}{V'V''.\,\mu'''}\right)} = T_{0}.\; T_{,,,}\,.\sqrt{\left(\frac{P'P''.\,\eta'''}{V'V''.\,\mu'''}\right)}; \\
r_{,,}.\, r_{,,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta'}{2V''V'''}\right)} + q_{,}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,}}{2P''P'''}\right)} + S'\right\}.\, \sqrt{\left(\frac{P''P'''.\,\eta'}{V''V'''.\,\mu_{,}}\right)} = T_{0}.\; R_{,}\,.\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\,\eta'}{V''V'''.\,\mu_{,}}\right)}; \\
r_{,}.\, r_{,,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta''}{2V'V'''}\right)} + q_{,,}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}}{2P'P'''}\right)} + S''\right\}.\, \sqrt{\left(\frac{P'P'''.\,\eta''}{V'V'''.\,\mu_{,,}}\right)} = T_{0}.\; R_{,,}\,.\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\,\eta''}{V'V'''.\,\mu_{,,}}\right)}; \\
r_{,}.\, r_{,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta'''}{2V'V''}\right)} + q_{,,,}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{2P'P''}\right)} + S'''\right\}.\, \sqrt{\left(\frac{P'P''.\,\eta'''}{V'V'''.\,\mu_{,,,}}\right)} = T_{0}.\; R_{,,,}\,.\sqrt{\left(\frac{P'P''.\,\eta'''}{V'V'''.\,\mu_{,,,}}\right)};
\end{aligned}
\right\}\ [XIX]
$$

Die Entwicklungen der Producte $t_{0}.\, r_{,}$; $t_{0}.\, r_{,,}$; $t_{0}.\, r_{,,,}$; $r_{0}.\, t_{,}$; $r_{0}.\, t_{,,}$; $r_{0}.\, t_{,,,}$ geben ferner nachstehende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
t_0 \cdot r_{\prime} &= \tfrac{1}{2}\left\{s' + \sqrt{\left(\frac{\eta_{\prime}}{2V''V'''}\right)}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{Q_{\prime} + \sqrt{\left(\frac{\mu'}{2P''P'''}\right)}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{\prime}}{V''V'''.\mu'}\right)} = R_{\prime\prime}\cdot R_{\prime\prime\prime}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{\prime}}{V''V'''.\mu'}\right)};\\
t_0 \cdot r_{\prime\prime} &= \tfrac{1}{2}\left\{s'' + \sqrt{\left(\frac{\eta_{\prime\prime}}{2V'V'''}\right)}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{Q_{\prime\prime} + \sqrt{\left(\frac{\mu''}{2P'P'''}\right)}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{\prime\prime}}{V'V'''.\mu''}\right)} = R_{\prime}\cdot R_{\prime\prime\prime}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{\prime\prime}}{V'V'''.\mu''}\right)};\\
t_0 \cdot r_{\prime\prime\prime} &= \tfrac{1}{2}\left\{s''' + \sqrt{\left(\frac{\eta_{\prime\prime\prime}}{2V'V''}\right)}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{Q_{\prime\prime\prime} + \sqrt{\left(\frac{\mu'''}{2P'P''}\right)}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{\prime\prime\prime}}{V'V''.\mu'''}\right)} = R_{\prime}\cdot R_{\prime\prime}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{\prime\prime\prime}}{V'V''.\mu'''}\right)};\\
r_0 \cdot t_{\prime} &= \tfrac{1}{2}\left\{s' - \sqrt{\left(\frac{\eta_{\prime}}{2V''V'''}\right)}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu'}{2P''P'''}\right)} - Q_{\prime}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{\prime}}{V''V'''.\mu'}\right)} = T_{\prime\prime}\cdot T_{\prime\prime\prime}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{\prime}}{V''V'''.\mu'}\right)};\\
r_0 \cdot t_{\prime\prime} &= \tfrac{1}{2}\left\{s'' - \sqrt{\left(\frac{\eta_{\prime\prime}}{2V'V'''}\right)}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu''}{2P'P'''}\right)} - Q_{\prime\prime}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{\prime\prime}}{V'V'''.\mu''}\right)} = T_{\prime}\cdot T_{\prime\prime\prime}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{\prime\prime}}{V'V'''.\mu''}\right)};\\
r_0 \cdot t_{\prime\prime\prime} &= \tfrac{1}{2}\left\{s''' - \sqrt{\left(\frac{r_{\prime\prime\prime}}{2V'V''}\right)}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu'''}{2P'P''}\right)} - Q_{\prime\prime\prime}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{\prime\prime\prime}}{V'V''.\mu'''}\right)} = T_{\prime}\cdot T_{\prime\prime}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{\prime\prime\prime}}{V'V'''.\mu'''}\right)};
\end{aligned} \qquad [XX]$$

Endlich geben die Entwicklungen der Producte $t_{\prime}.r_{\prime\prime}$; $t_{\prime}.r_{\prime\prime\prime}$; $t_{\prime\prime}.r_{\prime}$; $t_{\prime\prime}.r_{\prime\prime\prime}$; $t_{\prime\prime\prime}.r_{\prime}$; $t_{\prime\prime\prime}.r_{\prime\prime}$ nachstehende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
t_{,}\cdot r_{,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta_{,,,}}{2V'V''}\right)}+s_{,,,}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{2P'P''}\right)}-s_{,,,}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{,,,}}{V'V''.\mu_{,,,}}\right)}=T_{,,}\cdot R_{,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{,,,}}{V'V''.\mu_{,,,}}\right)};\\
t_{,}\cdot r_{,,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta_{,,}}{2V'V'''}\right)}-s_{,,}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}}{2P'P'''}\right)}+s_{,,}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{,,}}{V'V'''.\mu_{,,}}\right)}=T_{,,,}\cdot R_{,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{,,}}{V'V'''.\mu_{,,}}\right)};\\
t_{,,}\cdot r_{,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta_{,,,}}{2V'V''}\right)}-s_{,,,}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{2P'P''}\right)}+s_{,,,}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{,,,}}{V'V''.\mu_{,,,}}\right)}=T_{,}\cdot R_{,,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P''.\eta_{,,,}}{V'V''.\mu_{,,,}}\right)};\\
t_{,,}\cdot r_{,,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta_{,}}{2V''V'''}\right)}+s_{,}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,}}{2P''P'''}\right)}-s_{,}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{,}}{V''V'''.\mu_{,}}\right)}=T_{,,,}\cdot R_{,,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{,}}{V''V'''.\mu_{,}}\right)};\\
t_{,,,}\cdot r_{,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta_{,,}}{2V'V'''}\right)}+s_{,,}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}}{2P'P'''}\right)}-s_{,,}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{,,}}{V'V'''.\mu_{,,}}\right)}=T_{,}\cdot R_{,,,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P'P'''.\eta_{,,}}{V'V'''.\mu_{,,}}\right)};\\
t_{,,,}\cdot r_{,,} &= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\eta_{,}}{2V''V'''}\right)}-s_{,}\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,,}}{2P'P''}\right)}+s_{,}\right\}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{,,,}}{V''V'''.\mu_{,,,}}\right)}=T_{,,}\cdot R_{,,,}\cdot\sqrt{\left(\frac{P''P'''.\eta_{,}}{V''V'''.\mu_{,}}\right)};
\end{aligned}\right\}\quad [XXI]$$

Aehnliche Resultate ergeben sich für die Producte je zweier der großen Buchstaben T und R.

16. Aus den Gleichungen der vorhergehenden Systeme fließen nun von selbst nachstehende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{t_{0}\cdot t_{,}}{R_{0}\cdot R_{,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P''P'''\,.\,\eta'}{V''V'''\,.\,\mu'}\right)} = -\frac{q'}{Q'} = \left(\frac{r_{0}\cdot r_{,}}{T_{0}\cdot T_{,}}\right);\\
\left(\frac{t_{0}\cdot t_{,,}}{R_{0}\cdot R_{,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P'''\,.\,\eta''}{V'V'''\,.\,\mu''}\right)} = -\frac{q''}{Q''} = \left(\frac{r_{0}\cdot r_{,,}}{T_{0}\cdot T_{,,}}\right);\\
\left(\frac{t_{0}\cdot t_{,,,}}{R_{0}\cdot R_{,,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P''\,.\,\eta'''}{V'V''\,.\,\mu'''}\right)} = -\frac{q'''}{Q'''} = \left(\frac{r_{0}\cdot r_{,,,}}{T_{0}\cdot T_{,,,}}\right);
\end{aligned}\right\}\;.\;.\quad [XXII]$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{t_{,,}\cdot t_{,,,}}{R_0\cdot T_{,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P''P'''\cdot\eta'}{V''V'''\cdot\mu_{,}}\right)} = +\frac{q'}{S'} = \left(\frac{r_{,,}\cdot r_{,,,}}{T_0\cdot R_{,}}\right);\\
\left(\frac{t_{,}\cdot t_{,,,}}{R_0\cdot T_{,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P'''\cdot\eta''}{V'V'''\cdot\mu_{,,}}\right)} = +\frac{q''}{S''} = \left(\frac{r_{,}\cdot r_{,,,}}{T_0\cdot R_{,,}}\right);\\
\left(\frac{t_{,}\cdot t_{,,}}{R_0\cdot T_{,,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P''\cdot\eta'''}{V'V''\cdot\mu_{,,,}}\right)} = +\frac{q'''}{S'''} = \left(\frac{r_{,}\cdot r_{,,}}{T_0\cdot R_{,,,}}\right);
\end{aligned}\right\}\cdot\cdot\ [\mathrm{XXIII}]$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{r_0\cdot t_{,}}{T_{,,}\cdot T_{,,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P''P'''\cdot\eta_{,}}{V''V'''\cdot\mu'}\right)} = +\frac{s'}{Q_{,}} = \left(\frac{t_0\cdot r_{,}}{R_{,,}\cdot R_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{r_0\cdot t_{,,}}{T_{,}\cdot T_{,,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P'''\cdot\eta_{,,}}{V'V'''\cdot\mu''}\right)} = +\frac{s''}{Q_{,,}} = \left(\frac{t_0\cdot r_{,,}}{R_{,}\cdot R_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{r_0\cdot t_{,,,}}{T_{,}\cdot T_{,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P''\cdot\eta_{,,,}}{V'V''\cdot\mu'''}\right)} = +\frac{s'''}{Q_{,,,}} = \left(\frac{t_0\cdot r_{,,,}}{R_{,}\cdot R_{,,}}\right);
\end{aligned}\right\}\cdot\cdot\ [\mathrm{XXIV}]$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{t_{,}\cdot r_{,,}}{T_{,,}\cdot R_{,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P''\cdot\eta_{,,,}}{V'V''\cdot\mu_{,,,}}\right)} = -\frac{s_{,,,}}{S_{,,,}} = \left(\frac{t_{,,}\cdot r_{,}}{T_{,}\cdot R_{,,}}\right);\\
\left(\frac{t_{,}\cdot r_{,,,}}{T_{,,,}\cdot R_{,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P'P'''\cdot\eta_{,,}}{V'V'''\cdot\mu_{,,}}\right)} = -\frac{s_{,,}}{S_{,,}} = \left(\frac{t_{,,,}\cdot r_{,}}{T_{,}\cdot R_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{t_{,,}\cdot r_{,,,}}{T_{,,,}\cdot R_{,,}}\right) &= \sqrt{\left(\frac{P''P'''\cdot\eta_{,}}{V''V'''\cdot\mu_{,}}\right)} = -\frac{s_{,}}{S_{,}} = \left(\frac{t_{,,,}\cdot r_{,,}}{T_{,,}\cdot R_{,,,}}\right);
\end{aligned}\right\}\cdot\cdot\ [\mathrm{XXV}]$$

17. Diese Systeme zeigen uns auf den ersten Anblick schon sehr bemerkenswerthe Relationen zwischen den Größen $t\ r\ T\ R$, welche wir besonders hier zusammenstellen wollen. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right) &= \left(\frac{R_0}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right); & \left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{r_{,}}{t_{,}}\right) &= \left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right) &= \left(\frac{R_0}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right); & \left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right) &= \left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right) &= \left(\frac{R_0}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right); & \left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right) &= \left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right);
\end{aligned}\right\}\cdot\ [\mathrm{XXVI}]$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right) &= \left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)\cdot\left(\frac{R_0}{T_0}\right); & \left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right) &= \left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right) &= \left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{R_0}{T_0}\right); & \left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right) &= \left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right);\\
\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right) &= \left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{R_0}{T_0}\right); & \left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right) &= \left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right);
\end{aligned}\right\}\ [\mathrm{XXVII}]$$

Die Gleichungen des Systemes [XXVII] sind, wie man leicht einsehen wird, offenbare Folgerungen der Gleichungen des Systemes [XXVI].

18. Aus den Gleichungen der Systeme [XXII] . . [XXV] wird man durch sehr einfache Verbindungen, welche man unter ihnen bewerkstelliget, nachstehende Relationen erhalten:

$$\sqrt{\left(\frac{\eta'}{\eta_{,}}\right)} =$$

$$\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}.\,T_{,,,}}{R_0.\,R_{,}}\right)=\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,}.\,R_{,,,}}{T_0.\,T_{,}}\right)=\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{R_{,,}.\,R_{,,,}}{R_0.\,R_{,}}\right)=\left(\frac{r_{,}}{t_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}.\,T_{,,,}}{T_0.\,T_{,}}\right)=$$

$$\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,,}.\,R_{,,}}{T_0.\,R_{,}}\right)=\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}.\,R_{,,,}}{T_0.\,T_{,}}\right)=\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}.\,R_{,,,}}{T_0.\,R_{,}}\right)=\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,,}.\,R_{,,}}{R_0.\,T_{,}}\right);$$

$$\sqrt{\left(\frac{\eta''}{\eta_{,,}}\right)} =$$

$$\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,T_{,,,}}{R_0.\,R_{,,}}\right)=\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\cdot\left(\frac{R_{,}.\,R_{,,,}}{T_0.\,T_{,,}}\right)=\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,R_{,,,}}{R_0.\,T_{,,}}\right)=\left(\frac{r_{,}}{t_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,,}.\,R_{,}}{T_0.\,R_{,,}}\right)=$$

$$\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,T_{,,,}}{T_0.\,T_{,,}}\right)=\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{R_{,}.\,R_{,,,}}{R_0.\,R_{,,}}\right)=\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,R_{,,,}}{T_0.\,R_{,,}}\right)=\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,,}.\,R_{,}}{R_0.\,T_{,,}}\right);$$

$$\sqrt{\left(\frac{\eta'''}{\eta_{,,,}}\right)} =$$

$$\left(\frac{t_0}{r_0}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,T_{,,}}{R_0.\,R_{,,,}}\right)=\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\cdot\left(\frac{R_{,}.\,R_{,,}}{T_0.\,T_{,,,}}\right)=\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,R_{,,}}{R_0.\,T_{,,,}}\right)=\left(\frac{r_{,}}{t_{,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}.\,R_{,}}{T_0.\,R_{,,,}}\right)=$$

$$\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,R_{,,}}{T_0.\,R_{,,,}}\right)=\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,,}.\,R_{,}}{R_0.\,T_{,,,}}\right)=\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{T_{,}.\,T_{,,}}{T_0.\,T_{,,,}}\right)=\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{R_{,}.\,R_{,,}}{R_0.\,R_{,,,}}\right);$$

$$\sqrt{\left(\frac{\mu'}{\mu_{,}}\right)} =$$

$$\left(\frac{T_0}{R_0}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}.\,t_{,,,}}{r_0.\,r_{,}}\right)=\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,}.\,r_{,,,}}{t_0.\,t_{,}}\right)=\left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)\cdot\left(\frac{r_{,,}.\,r_{,,,}}{r_0.\,r_{,}}\right)=\left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}.\,t_{,,,}}{t_0.\,t_{,}}\right)=$$

$$\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}.\,r_{,,}}{t_0.\,r_{,}}\right)=\left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}.\,r_{,,,}}{r_0.\,t_{,}}\right)=\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}.\,r_{,,,}}{t_0.\,r_{,}}\right)=\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}.\,r_{,,}}{r_0.\,t_{,}}\right);$$

$$\sqrt{\left(\frac{\mu''}{\mu_{,,}}\right)} =$$

$$\left(\frac{T_0}{R_0}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}.\,t_{,,}}{r_0.\,r_{,,}}\right)=\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{r_{,}.\,r_{,,,}}{t_0.\,t_{,,}}\right)=\left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}.\,r_{,,,}}{r_0.\,t_{,,}}\right)=\left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}.\,r_{,}}{t_0.\,r_{,,}}\right)=$$

$$\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}.\,t_{,,,}}{t_0.\,t_{,,}}\right)=\left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{r_{,}.\,r_{,,,}}{r_0.\,r_{,,}}\right)=\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}.\,r_{,,,}}{t_0.\,r_{,,}}\right)=\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,,}.\,r_{,}}{r_0.\,t_{,,}}\right);$$

$$\sqrt{\left(\frac{u'''}{u_{,,,}}\right)} =$$

$$\left(\frac{T_0}{R_0}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}\,.\,t_{,,}}{r_0\,.\,r_{,,,}}\right)=\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{r_{,}\,.\,r_{,,}}{t_0\,.\,t_{,,,}}\right)=\left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}\,.\,r_{,,}}{r_0\,.\,t_{,,,}}\right)=\left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}\,.\,r_{,}}{t_0\,.\,r_{,,,}}\right)=$$

$$\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}\,.\,r_{,,}}{t_0\,.\,r_{,,,}}\right)=\left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,,}\,.\,r_{,}}{r_0\,.\,t_{,,,}}\right)=\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{t_{,}\,.\,t_{,,}}{t_0\,.\,t_{,,,}}\right)=\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)\cdot\left(\frac{r_{,}\,.\,r_{,,}}{r_0\,.\,r_{,,,}}\right).$$

19. Um die kleinen Buchstaben durch die großen, und umgekehrt, diese durch jene auszudrücken, dienen nachstehende Gleichungen, welche sich sehr leicht aus den Relationen des Systemes [XXVI] ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{t_0}{r_0}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right)\right\}};\quad \left(\frac{T_0}{R_0}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\left(\frac{r_{,}}{t_{,}}\right)\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right)\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right)\right\}};\\
&\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\left(\frac{R_{,}}{T_{,}}\right)\left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)\right\}};\quad \left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\left(\frac{r_{,}}{t_{,}}\right)\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right)\right\}};\\
&\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\left(\frac{R_{,,}}{T_{,,}}\right)\left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)\left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)\right\}};\quad \left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\left(\frac{r_{,,}}{t_{,,}}\right)\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right)\right\}};\\
&\left(\frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{R_0}{T_0}\right)\left(\frac{R_{,,,}}{T_{,,,}}\right)\left(\frac{T_{,}}{R_{,}}\right)\left(\frac{T_{,,}}{R_{,,}}\right)\right\}};\quad \left(\frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{r_0}{t_0}\right)\left(\frac{r_{,,,}}{t_{,,,}}\right)\left(\frac{t_{,}}{r_{,}}\right)\left(\frac{t_{,,}}{r_{,,}}\right)\right\}};
\end{aligned}\right\}\ [XXVIII]$$

Setzt man, um noch mehr abzukürzen:

$$\frac{t_0}{r_0}=\vartheta_0;\quad \frac{t_{,}}{r_{,}}=\vartheta_{,};\quad \frac{t_{,,}}{r_{,,}}=\vartheta_{,,};\quad \frac{t_{,,,}}{r_{,,,}}=\vartheta_{,,,};$$

$$\frac{T_0}{R_0}=\Theta_0;\quad \frac{T_{,}}{R_{,}}=\Theta_{,};\quad \frac{T_{,,}}{R_{,,}}=\Theta_{,,};\quad \frac{T_{,,,}}{R_{,,,}}=\Theta_{,,,};$$

dann geben die Relationen [XXVI] und [XXVII]:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,}\,.\,\Theta_0\,.\,\Theta_{,}=1;\quad \vartheta_{,,}\,.\,\vartheta_{,,,}\,.\,\Theta_0=\Theta_{,};\quad \vartheta_0\,.\,\Theta_{,,}\,.\,\Theta_{,,,}=\vartheta_{,};\\
&\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,,}\,.\,\Theta_0\,.\,\Theta_{,,}=1;\quad \vartheta_{,}\,.\,\vartheta_{,,,}\,.\,\Theta_0=\Theta_{,,};\quad \vartheta_0\,.\,\Theta_{,}\,.\,\Theta_{,,,}=\vartheta_{,,};\\
&\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,,,}\,.\,\Theta_0\,.\,\Theta_{,,,}=1;\quad \vartheta_{,}\,.\,\vartheta_{,,}\,.\,\Theta_0=\Theta_{,,,};\quad \vartheta_0\,.\,\Theta_{,}\,.\,\Theta_{,,}=\vartheta_{,,,};
\end{aligned}$$

und die Relationen [XXVIII], welche unmittelbar aus diesen folgen, werden hierauf so dargestellt werden können:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_0=\frac{1}{\sqrt{(\Theta_0\,.\,\Theta_{,}\,.\,\Theta_{,,}\,.\,\Theta_{,,,})}};\quad \Theta_0=\frac{1}{\sqrt{(\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,}\,.\,\vartheta_{,,}\,.\,\vartheta_{,,,})}};\\
&\vartheta_{,}=\sqrt{\left(\frac{\Theta_{,,}\,.\,\Theta_{,,,}}{\Theta_0\,.\,\Theta_{,}}\right)};\quad \Theta_{,}=\sqrt{\left(\frac{\vartheta_{,,}\,.\,\vartheta_{,,,}}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,}}\right)};\\
&\vartheta_{,,}=\sqrt{\left(\frac{\Theta_{,}\,.\,\Theta_{,,,}}{\Theta_0\,.\,\Theta_{,,}}\right)};\quad \Theta_{,,}=\sqrt{\left(\frac{\vartheta_{,}\,.\,\vartheta_{,,,}}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,,}}\right)};\\
&\vartheta_{,,,}=\sqrt{\left(\frac{\Theta_{,}\,.\,\Theta_{,,}}{\Theta_0\,.\,\Theta_{,,,}}\right)};\quad \Theta_{,,,}=\sqrt{\left(\frac{\vartheta_{,}\,.\,\vartheta_{,,}}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_{,,,}}\right)};
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ [XXIX]$$

In diesen bisher angeführten Relationen sind sehr merkwürdige Gleichungen der sphärischen Trigonometrie enthalten, welche wir hieraus eben entwickeln wollen. Diese Entwicklung besteht wieder in nichts anderm, als in einer Uebersetzung der entdeckten Relationen, so wie dieß bei allen, welche wir bereits gefunden haben, der Fall war.

20. Wenn wir uns wieder der in der sphärischen Trigonometrie üblichen Bezeichnung bedienen, gemäß welcher $A\,B\,C$ die drei sphärischen Winkel, und $a\,b\,c$ die ihnen respective gegenüberstehenden Seiten sind; dann hat man, vermöge der Gleichungen [X]:

$$\left.\begin{aligned}
t_0 &= \cos \tfrac{1}{4}(a+c-b); & r_0 &= \sin \tfrac{1}{4}(a+c-b);\\
t_, &= \sin \tfrac{1}{4}(a+b-c); & r_, &= \cos \tfrac{1}{4}(a+b-c);\\
t_{,,} &= \cos \tfrac{1}{4}(a+b+c); & r_{,,} &= \sin \tfrac{1}{4}(a+b+c);\\
t_{,,,} &= \sin \tfrac{1}{4}(b+c-a); & r_{,,,} &= \cos \tfrac{1}{4}(b+c-a);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [XXX]$$

$$\left.\begin{aligned}
T_0 &= \sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right); & R_0 &= \cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right);\\
T_, &= \sin\left(45^\circ-\frac{A+B-C}{4}\right); & R_, &= \cos\left(45^\circ-\frac{A+B-C}{4}\right);\\
T_{,,} &= -\sin\left(45^\circ-\frac{A+B+C}{4}\right); & R_{,,} &= \cos\left(45^\circ-\frac{A+B+C}{4}\right);\\
T_{,,,} &= \sin\left(45^\circ-\frac{B+C-A}{4}\right); & R_{,,,} &= \cos\left(45^\circ-\frac{B+C-A}{4}\right);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [XXXI]$$

Bemerkt man, daß:

$$\sin(45^\circ \pm \varphi) = \cos(45^\circ \mp \varphi);$$

so hat man noch, anstatt der Ausdrücke [XXXI]:

$$\left.\begin{aligned}
T_0 &= \cos\left(45^\circ-\frac{A+C-B}{4}\right); & R_0 &= \sin\left(45^\circ-\frac{A+C-B}{4}\right);\\
T_, &= \cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right); & R_, &= \sin\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right);\\
T_{,,} &= -\cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right); & R_{,,} &= \sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right);\\
T_{,,,} &= \cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right); & R_{,,,} &= \sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [XXXII]$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_{0} &= cot\,\tfrac{1}{4}\,(a+c-b);\ \Theta_{0} = tg.\left\{45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right\} = cot\left\{45^\circ-\frac{A+C-B}{4}\right\};\\
\vartheta_{,} &= tg.\,\tfrac{1}{4}\,(a+b-c);\ \Theta_{,} = tg.\left\{45^\circ-\frac{A+B-C}{4}\right\} = cot\left\{45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right\};\\
\vartheta_{,,} &= cot\,\tfrac{1}{4}\,(a+b+c);\ \Theta_{,,} = -tg.\left\{45^\circ-\frac{A+B+C}{4}\right\} = -cot\left\{45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right\};\\
\vartheta_{,,,} &= tg.\,\tfrac{1}{4}\,(b+c-a);\ \Theta_{,,,} = tg.\left\{45^\circ-\frac{B+C-A}{4}\right\} = cot\left\{45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right\};
\end{aligned}\right\}\ [XXXIII]$$

21. Die Gleichungen, welche wir Artikel 16 angeführt haben, liefern uns nun die nachstehenden Gleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\left\{\frac{sin\,\frac{1}{2}\,a}{cos\,\frac{1}{2}\,A}\right\} =$$

$$\frac{sin\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)\cdot\,cos\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)}{cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\,cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right)} = \frac{sin\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)\cdot\,cos\,\frac{1}{4}\,(a+b-c)}{cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\,sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right)};$$

$$\left\{\frac{sin\,\frac{1}{2}\,a}{sin\,\frac{1}{2}\,A}\right\} =$$

$$\frac{sin\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)\cdot\,cos\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\,cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right)} = \frac{cos\,\frac{1}{4}\,(b+c-a).\,sin\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{sin\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\,sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right)};$$

$$\left\{\frac{cos\,\frac{1}{2}\,a}{cos\,\frac{1}{2}\,A}\right\} =$$

$$\frac{sin\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)\cdot\,sin\,\frac{1}{4}\,(a+b-c)}{cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\,cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)} = \frac{cos\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)\cdot\,cos\,\frac{1}{4}\,(a+b-c)}{sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\,sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)};$$

$$\left\{\frac{cos\,\frac{1}{2}\,a}{sin\,\frac{1}{2}\,A}\right\} =$$

$$\frac{cos\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)\cdot\,cos\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)}{sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\,cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)} = \frac{sin\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)\cdot\,sin\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)}{cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\,sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)};$$

Die ähnlichen Formeln für die Verhältnisse:

$$\left\{\frac{sin\,\frac{1}{2}\,b}{cos\,\frac{1}{2}\,B}\right\}\ \text{etc. und}\ \left\{\frac{sin\,\frac{1}{2}\,c}{cos\,\frac{1}{2}\,C}\right\}\ \text{etc.},$$

welche uns die übrigen Relationen der Systeme [XXII] · · [XXV] geben, erhält man auch unmittelbar aus den vorstehenden durch bloße Vertauschung der Buchstaben.

22. Die Relationen [XXVI] und [XXVII] geben uns ferner:

$$\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b-c)}{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)} = \frac{tg.\left\{45^\circ + \frac{A+B-C}{4}\right\}}{tg.\left\{45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right\}};$$

$$\frac{cot\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)} = -\frac{tg.\left\{45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right\}}{tg.\left\{45^\circ + \frac{A+B-C}{4}\right\}};$$

$$\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{tg.\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)} = \frac{tg.\left\{45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right\}}{cot\left\{45^\circ + \frac{A+B-C}{4}\right\}};$$

$$\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{cot\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)} = -\frac{cot\left\{45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right\}}{tg.\left\{45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right\}};$$

$$\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b-c)}{cot\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)} = -\frac{cot\left\{45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right\}}{tg.\left\{45^\circ + \frac{B+C-A}{4}\right\}};$$

Diese Formeln können durch bloße Vertauschung der Buchstaben noch um eine große Anzahl ähnlicher vermehrt werden; auch lassen sich alle diese Formeln, wie leicht begreiflich ist, unmittelbar aus den oben angezeigten Relationen [XXVI] und [XXVII] ableiten.

23. Die Relationen [XXVIII] oder [XXIX] geben uns weiter:

$$tg.\left\{45^\circ + \frac{B+C-A}{4}\right\} = \sqrt{\left\{\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(b+c-a).\;tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b-c).\;tg.\,\frac{1}{4}\,(a+c-b)}\right\}};$$

$$tg.\left\{45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right\} = \sqrt{\left\{\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+c-b).\;tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b-c).\;tg.\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)}\right\}};$$

$$tg.\left\{45^\circ + \frac{A+B-C}{4}\right\} = \sqrt{\left\{\frac{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b-c).\;tg.\,\frac{1}{4}\,(a+b+c)}{tg.\,\frac{1}{4}\,(a+c-b).\;tg.\,\frac{1}{4}\,(b+c-a)}\right\}};$$

$$cot.\left\{45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right\} =$$

$$\sqrt{\left\{tg.\,\tfrac{1}{4}\,(a+b+c).\;tg.\,\tfrac{1}{4}\,(b+c-a).\;tg.\,\tfrac{1}{4}\,(a+c-b).\;tg.\,\tfrac{1}{4}\,(a+b-c)\right\}}.$$

Und umgekehrt:

$$tg.\ \tfrac{1}{4}(b+c-a) = \sqrt{\left\{\frac{-\cot\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right).\ tg.\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right)}{\cot\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\ \cot\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right)}\right\}};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{4}(a+c-b) = \sqrt{\left\{\frac{-\cot\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\ tg.\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right)}{\cot\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\ \cot\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}\right\}};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{4}(a+b-c) = \sqrt{\left\{\frac{-\cot\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\ tg.\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right)}{\cot\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\ \cot\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}\right\}};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{4}(a+b+c) =$$

$$\sqrt{\left\{-\cot\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\ tg.\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right).\ tg.\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\ tg.\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)\right\}}$$

24. Die Gleichungen des Artikel 18 geben endlich noch:

$$tg.\ \tfrac{1}{2}a.\ tg.\ \tfrac{1}{4}(b+c-a) = -\frac{\cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{\sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\sin\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{2}a.\ tg.\ \tfrac{1}{4}(a+c-b) = -\frac{\cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{\cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\sin\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{2}a.\ \cot\ \tfrac{1}{4}(b+c-a) = +\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{\cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{2}a.\ \cot\ \tfrac{1}{4}(a+c-b) = +\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{\sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{2}a.\ tg.\ \tfrac{1}{4}(a+b+c) = -\frac{\cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{\cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)};$$

$$tg.\ \tfrac{1}{2}a.\ \cot\ \tfrac{1}{4}(a+b+c) = +\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{\sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\sin\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right)};$$

Aehnliche Ausdrücke wird man für:

$tg.\ \tfrac{1}{2}\, b.\ tg.\ \tfrac{1}{4}\,(a + c - b)$ etc., und $tg.\ \tfrac{1}{2}\, c.\ tg.\ \tfrac{1}{4}\,(a + b - c)$ etc.

durch bloße Vertauschung der Buchstaben aus den vorhergehenden erhalten. Umgekehrt hat man ferner:

$$cot\ \tfrac{1}{2} A.\ tg.\left(45^\circ + \frac{B+C-A}{4}\right) = \frac{sin\ \frac{1}{4}\,(a+b+c) \cdot sin\ \frac{1}{4}\,(b+c-a)}{sin\ \frac{1}{4}\,(a+c-b) \cdot sin\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)};$$

$$cot\ \tfrac{1}{2} A.\ cot\left(45^\circ + \frac{B+C-A}{4}\right) = \frac{cos\ \frac{1}{4}\,(a+b+c) \cdot cos\ \frac{1}{4}\,(b+c-a)}{cos\ \frac{1}{4}\,(a+c-b) \cdot cos\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)};$$

$$cot\ \tfrac{1}{2} A.\ tg.\left(45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right) = \frac{sin\ \frac{1}{4}\,(a+b+c) \cdot cos\ \frac{1}{4}\,(b+c-a)}{cos\ \frac{1}{4}\,(a+c-b) \cdot sin\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)};$$

$$cot\ \tfrac{1}{2} A.\ cot\left(45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right) = \frac{cos\ \frac{1}{4}\,(a+b+c) \cdot sin\ \frac{1}{4}\,(b+c-a)}{sin\ \frac{1}{4}\,(a+c-b) \cdot cos\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)};$$

$$cot\ \tfrac{1}{2} A.\ tg.\left(45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right) = -\frac{cos\ \frac{1}{4}\,(a+b+c) \cdot cos\ \frac{1}{4}\,(b+c-a)}{sin\ \frac{1}{4}\,(a+c-b) \cdot sin\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)};$$

$$cot\ \tfrac{1}{2} A.\ cot\left(45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right) = -\frac{sin\ \frac{1}{4}\,(a+b+c) \cdot sin\ \frac{1}{4}\,(b+c-a)}{cos\ \frac{1}{4}\,(a+c-b) \cdot cos\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)};$$

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben ergeben sich die übrigen Ausdrücke für:

$$cot\ \tfrac{1}{2}\, B.\ tg.\left(45^\circ + \frac{A+C-B}{4}\right) \text{ und } cot\ \tfrac{1}{2}\, C.\ tg.\left(45^\circ + \frac{A+B-C}{4}\right) \text{ etc.}$$

Aus den obigen Relationen [XXII] . . [XXV] lassen sich noch unzählig viele andere Gleichungen herleiten; mit Uebergehung aller dieser will ich nur nachstehende vier hersetzen, welche mir unter allen übrigen am merkwürdigsten schienen. Es ist nemlich:

$$sin\ \tfrac{1}{4}\,(a+b+c) =$$

$$\sqrt{\left\{\frac{-cos\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\ sin\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right).\ sin\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\ sin\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4.}\right)}{sin\ \frac{1}{2} A.\ sin\ \frac{1}{2} B.\ sin\ \frac{1}{2} C}\right\}};$$

$$cos\ \tfrac{1}{4}\,(a+b+c) =$$

$$\sqrt{\left\{\frac{sin\left(45^\circ+\frac{A+B+C}{4}\right).\ cos\left(45^\circ+\frac{A+B-C}{4}\right).\ cos\left(45^\circ+\frac{A+C-B}{4}\right).\ cos\left(45^\circ+\frac{B+C-A}{4}\right)}{sin\ \frac{1}{2} A.\ sin\ \frac{1}{2} B.\ sin\ \frac{1}{2} C}\right\}};$$

$$sin\left(45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right) =$$

$$\sqrt{\left\{\frac{cos\ \frac{1}{4}\,(a+b+c).\ cos\ \frac{1}{4}\,(b+c-a).\ cos\ \frac{1}{4}\,(a+c-b).\ cos\ \frac{1}{4}\,(a+b-c)}{cos\ \frac{1}{2}\, a.\ cos\ \frac{1}{2}\, b.\ cos\ \frac{1}{2}\, c}\right\}};$$

$$\cos\left(45^\circ + \frac{A+B+C}{4}\right)$$

$$\sqrt{\left\{\frac{-\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\ \sin\frac{1}{2}(b+c-a).\ \sin\frac{1}{2}(a+c-b).\ \sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a.\ \cos\frac{1}{2}b.\ \cos\frac{1}{2}c}\right\}};$$

Der Leser findet nun hier eine hinlängliche Anleitung, um noch viele andere ähnliche Relationen zu entdecken. Die Methode, welche uns auf alle bisherigen Resultate geführt hat, ist an sich einfach und leicht, und verdient aus diesem Grunde und wegen ihrer Gleichförmigkeit vor jeder andern den Vorzug.

IV.

Ausdrücke für die Neigungswinkel der Durchschnittslinien je zweier Ebenen gegen die dritte.

---

24. **W**ir haben die Lagrange'schen Relationen mit gutem Erfolge angewandt, um alle Gleichungen, welche zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes Statt finden, daraus herzuleiten. Itzt wollen wir diese Relationen anwenden, um eine andere gleichfalls der sphärischen Trigonometrie zugehörige Frage zu beantworten, welche die Perpendikel betrifft, so von den Scheitelpunkten des sphärischen Dreieckes auf die gegenüberstehenden Seiten oder auf ihre Verlängerungen herabgelassen werden. Diese perpendikulären Bögen sind, wie man weiß, die Neigungswinkel der Geraden 1, 2, 3 gegen die respectiven Ebenen *I*, *II*, *III*. Da wir auch die Segmente, welche diese Perpendikel auf den drei Seiten des Dreieckes machen, bestimmen wollen; so suchen wir vor allen andern die Gleichungen derjenigen Ebenen, welche durch die Geraden 1, 2, 3 und senkrecht auf die respectiven Ebenen *I*, *II*, *III* gelegt werden.

Wenn nun überhaupt

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung einer Ebene, und wenn

$$y = c.\ x;\quad z = b.\ x$$

das System der Gleichungen einer Geraden ist; wenn man ferner zur Gleichung einer andern, durch diese Gerade gehenden und auf jener Ebene senkrecht stehenden Ebene annimmt:

$$(A).\ x + (B).\ y + (C).\ z = 0;$$

alsdann hat man, vermöge der zwei gegebenen Bedingungen, zur Bestimmung der Coëffizienten (A) (B) (C) nachstehende zwei Gleichungen:

$$(A) + (B).\ c + (C).\ b = 0;\quad \text{und}\ A.\ (A) + B.\ (B) + C.\ (C) = 0.$$

Diesen zwei Bedingungen gemäß kann man annehmen:

$$(A) = (C.\ c - B.\ b);\quad (B) = (A.\ b - C);\quad (C) = (B - A.\ c).$$

Die Gleichungen der Durchschnittslinie beider Ebenen sind dann, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$A^2 + B^2 + C^2 = P^2;\quad A + B.\ c + C.\ b = \lambda,$$

nachstehende:

$$y = \left(\frac{P^2.\ c - B.\ \lambda}{P^2 - A.\ \lambda}\right).\ x;\quad z = \left(\frac{P^2.\ b - C.\ \lambda}{P^2 - A.\ \lambda}\right).\ x.$$

Wenden wir nun diese allgemeinen Ausdrücke auf die drei besondern Fälle an, um welche es sich hier handelt; so hat man, wenn man mit p' p'' p''' die Durchschnittslinien der drei durch die Geraden 1, 2, 3 gelegten und auf die Ebenen *I, II, III* respective senkrecht stehenden Ebenen mit den Ebenen *I, II, III* bezeichnet; oder, was dasselbe ist, sind p' p'' p''' die orthogonalen Projectionen der Geraden 1, 2, 3 in den respectiven Ebenen *I, II, III*; so findet man als Gleichungen

der Geraden p' . . $y = \left(\frac{P'^2\ .\ B_, - B'\ .\ N'}{P'^2\ .\ A_, - A'\ .\ N'}\right).\ x;\quad z = \left(\frac{P'^2\ .\ C_, - C'\ .\ N'}{P'^2\ .\ A_, - A'\ .\ N'}\right).\ x;$

» » » p'' . . $y = \left(\frac{P''^2\ .\ B_{,,} - B''\ .\ N''}{P''^2\ .\ A_{,,} - A''\ .\ N''}\right).\ x;\quad z = \left(\frac{P''^2\ .\ C_{,,} - C''\ .\ N''}{P''^2\ .\ A_{,,} - A''\ .\ N''}\right).\ x;$

» » » p''' . . $y = \left(\frac{P'''^2.\ B_{,,,} - B'''.\ N'''}{P'''^2.\ A_{,,,} - A'''.\ N'''}\right).\ x;\quad z = \left(\frac{P'''^2.\ C_{,,,} - C'''.\ N'''}{P'''^2.\ A_{,,,} - A'''.\ N'''}\right).\ x;$

25. Mit Beihilfe der Lagrange'schen Relationen, durch welche man die allgemeinen Ausdrücke reducirt, welche uns die Elemente der analytischen Geometrie für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel an die Hand gibt, so diese Geraden und Ebenen im gegenwärtigen Systeme bilden, wird man sehr leicht nachstehende Formeln finden:

$$\sin(1.\,I)=\frac{N}{P'.\,V'};\quad \cos(1.\,I)=\frac{\sqrt{(P'^2.\,V'^2-N^2)}}{P'.\,V'};\quad tg.(1.\,I)=\frac{N}{\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}};$$

$$\sin(2.\,II)=\frac{N}{P''.\,V''};\quad \cos(2.\,II)=\frac{\sqrt{(P''^2.\,V''^2-N^2)}}{P''.\,V''};\quad tg.(2.\,II)=\frac{N}{\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}};$$

$$\sin(3.III)=\frac{N}{P'''.V'''};\quad \cos(3.III)=\frac{\sqrt{(P'''^2.V'''^2.-N^2)}}{P'''.V'''};\quad tg.(3.III)=\frac{N}{\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}};$$

Ferner findet man, nach einigen leichten Reductionen:

$$\cos(p'.2)=\frac{P'.E'''}{V''.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}};\quad \cos(p''.1)=\frac{P''.\,E'''}{V'.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}};\quad \cos(p'''.1)=\frac{P'''.\,E''}{V'.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}};$$

$$\cos(p'.3)=\frac{P'.\,E''}{V'''.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}};\quad \cos(p''.3)=\frac{P''.\,E'}{V'''.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}};\quad \cos(p'''.2)=\frac{P'''\,E'}{V''.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}};$$

$$\sin(p'.2)=\frac{N.\,M''}{V''.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}};\quad \sin(p''.1)=\frac{N.\,M'}{V'.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}};\quad \sin(p'''.1)=\frac{N.\,M'}{V'.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}};$$

$$\sin(p'.3)=\frac{N.\,M'''}{V'''.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}};\quad \sin(p''.3)=\frac{N.M'''}{V'''.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}};\quad \sin(p'''.2)=\frac{N.\,M''}{V''.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}};$$

$$tg.(p'.2)=\left(\frac{N.M''}{P'.\,E'''}\right);\quad tg.(p''.\,1)=\left(\frac{N.\,M'}{P''.E'''}\right);\quad tg.(p'''.\,1)=\left(\frac{N.\,M'}{P'''.\,E''}\right);$$

$$tg.(p'.3)=\left(\frac{N.M'''}{P'.E''}\right);\quad tg.(p''.\,3)=\left(\frac{N.M'''}{P''.\,E'}\right);\quad tg.(p'''.\,2)=\left(\frac{N.\,M''}{P'''.\,E'}\right).$$

Diese Ausdrücke bieten mehr als ein Mittel dar, Verbindungen unter den Sinussen, Cosinussen und Tangenten der Winkel zu bewerkstelligen, welche die Geraden 1, 2, 3, p', p'', p''' sowohl unter einander als auch mit den Ebenen *I*, *II*, *III* bilden, oder überhaupt die Relationen zu entwickeln, welche zwischen den Seiten und Winkeln, und zwischen den Perpendikeln und Segmenten in einem sphärischen Dreiecke existiren.

26. Bezeichnet man die Ebenen, welche durch die Geraden 1, 2, 3 senkrecht auf die respectiven Ebenen *I; II, III* gelegt werden, mit e' e'' e'''; so hat man, aus dem Vorhergehenden, zur Gleichung

der Ebene e' $\ldots (A''M''-A'''M''')\,x+(B''M''-B'''M''')\,y+(C''M''-C'''M''')\,z=0;$

» » » e'' $\ldots (A'''M'''-A'M')\,x+(B'''M'''-B'M')\,y+(C'''M'''-C'M')\,z=0;$

» » » e''' $\ldots (A'M'-A''M'')\,x+(B'M'-B''M'')\,y+(C'M'-C''M'')\,z=0;$

Die allgemeinen Ausdrücke der analytischen Geometrie versehen uns hierauf mit nachstehenden Formeln:

$$\cos(e'.\,II) = \frac{E''}{P''.\sqrt{(P'^2V'^2 - N^2)}};\ \cos(e''.\,I) = \frac{E'}{P'.\sqrt{(P''^2V''^2 - N^2)}};\ \cos(e'''.\,I) = \frac{E'}{P'.\sqrt{(P'''^2V'''^2 - N^2)}};$$

$$\cos(e'.III) = \frac{E'''}{P''.\sqrt{(P'^2V'^2 - N^2)}};\ \cos(e''.III) = \frac{E'''}{P'''.\sqrt{(P''^2V''^2 - N^2)}};\ \cos(e'''.II) = \frac{E''}{P''.\sqrt{(P'''^2V'''^2 - N^2)}};$$

$$\sin(e'.\,II) = \frac{V'\,M'''}{P''.\sqrt{(P'^2V'^2 - N^2)}};\ \sin(e''.\,I) = \frac{V''\,M'''}{P'.\sqrt{(P''^2V''^2 - N^2)}};\ \sin(e'''.\,I) = \frac{V'''\,M''}{P'.\sqrt{(P'''^2V'''^2 - N^2)}};$$

$$\sin(e'.III) = \frac{V'\,M''}{P'''.\sqrt{(P'^2V'^2 - N^2)}};\ \sin(e''.III) = \frac{V''\,M'}{P'''.\sqrt{(P''^2V''^2 - N^2)}};\ \sin(e'''.II) = \frac{V'''\,M'}{P''.\sqrt{(P'''^2V'''^2 - N^2)}};$$

$$tg.(e'.\,II) = \left(\frac{V'\,M'''}{E''}\right);\quad tg.\,(e''.\,I) = \left(\frac{V''\,M'''}{E'}\right);\quad tg.\,(e'''.\,I) = \left(\frac{V'''\,M''}{E'}\right);$$

$$tg.(e'.III) = \left(\frac{V'\,M''}{E'''}\right);\quad tg.\,(e''.III) = \left(\frac{V''\,M'}{E'''}\right);\quad tg.\,(e'''.II) = \left(\frac{V'''\,M'}{E''}\right);$$

27. Ohne uns bei den Gleichungen zu verweilen, welche als Resultate der Verbindungen der Ausdrücke in den zwei vorhergehenden Artikeln zum Vorschein gebracht werden können; schreite ich zur Bestimmung der Lage des gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes der drei Perpendikel in einem sphärischen Dreiecke, der bekanntlich nur ein einziger ist. Nach dem Sprachgebrauche in der analytischen Geometrie heißt dieser letzte Satz so viel, als die drei Ebenen e' e'' e''' durchschneiden sich in einer und derselben Geraden. Wir wollen diese Durchschnittslinie der drei Ebenen mit Δ bezeichnen. Die Gleichungen dieser Geraden findet man, indem man zwei der Gleichungen der Ebenen e' e'' e''' verbindet, weil man, wie die Rechnung zeigen wird, immer auf dieselben Endgleichungen der Geraden gelangt, man mag was immer für zwei von den Gleichungen der Ebenen e' e'' e''' mit einander verbinden; daraus folgt, daß sich alle drei Ebenen e' e'' e''' nur in einer einzigen Geraden durchschneiden. Was die Gleichungen dieser Geraden Δ anbelangt, so findet man für sie, wenn man sich der Abkürzungen [122] der ersten Abtheilung bedient:

$$y = \frac{[\mathfrak{B}]}{[\mathfrak{A}]}\cdot x;\quad z = \frac{[\mathfrak{C}]}{[\mathfrak{A}]}\cdot x.$$

Setzt man nun abkürzend:

$$[\mathfrak{A}]^2 + [\mathfrak{B}]^2 + [\mathfrak{C}]^2 = [\mathfrak{D}]^2;$$

so erhält man, nach einigen einfachen Reductionen:

$$\sin(\Delta.\,I) = \frac{N.\,M''M'''}{P'.\,\mathfrak{D}};\ \sin(\Delta.\,II) = \frac{N.M'M'''}{P''.\,\mathfrak{D}};\ \sin(\Delta.III) = \frac{N.M'M''}{P'''.\,\mathfrak{D}},$$ woraus

$$\sin(\Delta.\,I) : \sin(\Delta.\,II) : \sin(\Delta.III) = \frac{1}{\cos(II.\,III)} : \frac{1}{\cos(I.\,III)} : \frac{1}{\cos(I.\,II)}$$ folgt.

Ferner hat man:

$$cos(\varDelta.I)=\frac{E'.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}}{P'.\,\mathfrak{D}};\; cos(\varDelta.II)=\frac{E''.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}}{P''.\,\mathfrak{D}};\; cos(\varDelta.III)=\frac{E'''.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}}{P'''.\,\mathfrak{D}};$$

$$tg.(\varDelta.I)=\frac{N.\,M''\,M'''}{E'.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}};\; tg.(\varDelta.II)=\frac{N.\,M'\,M'''}{E''.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}};\; tg.(\varDelta.III)=\frac{N.\,M'\,M''}{E'''.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}};$$

Zur Bestimmung der Winkel, welche die Gerade $\varDelta$ mit den Linien 1, 2, 3 macht, hat man nachstehende Ausdrücke:

$$cos(\varDelta.1)=\frac{E''.\,E'''}{V'.\,\mathfrak{D}};\; cos(\varDelta.2)=\frac{E'.\,E'''}{V''.\,\mathfrak{D}};\; cos(\varDelta.3)=\frac{E'.\,E''}{V'''.\,\mathfrak{D}};$$ woraus

$$cos(\varDelta.1):cos(\varDelta.2):cos(\varDelta.3)=\frac{1}{cos(2.3)}:\frac{1}{cos(1.3)}:\frac{1}{cos(1.2)}$$ folgt.

Ferner ist:

$$sin(\varDelta.1)=\frac{N.M'.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}}{V'.\,\mathfrak{D}};\; sin(\varDelta.2)=\frac{N.M''.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}}{V''.\,\mathfrak{D}};\; sin(\varDelta.3)=\frac{N.M'''.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}}{V'''.\,\mathfrak{D}};$$

$$tg.(\varDelta.1)=\frac{N.M'.\sqrt{(P'^2V'^2-N^2)}}{E''.\,E'''};\; tg.(\varDelta.2)=\frac{N.M''.\sqrt{(P''^2V''^2-N^2)}}{E'.\,E'''};\; tg.(\varDelta.3)=\frac{N.M'''.\sqrt{(P'''^2V'''^2-N^2)}}{E'.\,E''};$$

Da wir oben für $\mathfrak{D}$ den Ausdruck $\sqrt{\left\{E'.\,E''.\,E'''+N^2.\,M'\,M''\,M'''\right\}}$ gefunden haben; so wird man, wenn man diese Form von $\mathfrak{D}$ in die vorigen Ausdrücke bringt, dieselben in Functionen der Größen $VMEN$ erhalten. Somit wird man mittelst dieser Formeln die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche die Gerade $\varDelta$ sowohl mit den Ebenen *I, II, III,* als auch mit den Linien 1, 2, 3 macht, durch die Winkel des sphärischen Dreieckes, ausgedrückt erhalten.

Man kann noch bemerken, daß $\mathfrak{D}=$

$$sin\,B.\;sin\,C.\sqrt{\left\{cos\,a.\;cos\,b.\;cos\,c.\;sin^2A+cos\,A.\;cos\,B.\;cos\,C.\;sin^2a\right\}}=$$

$$sin\,A.\;sin\,C.\sqrt{\left\{cos\,a.\;cos\,b.\;cos\,c.\;sin^2B+cos\,A.\;cos\,B.\;cos\,C.\;sin^2b\right\}}=$$

$$sin\,A.\;sin\,B.\sqrt{\left\{cos\,a.\;cos\,b.\;cos\,c.\;sin^2C+cos\,A.\;cos\,B.\;cos\,C.\;sin^2c\right\}}.$$

V.

Analogien zwischen dem sphärischen Dreiecke, und zwischen dem geradlinigten, dessen Seiten die Sehnen der Bögen von jenem sind.

---

28. Endlich wollen wir die Lagrange'schen Relationen noch zu Untersuchungen der Beziehungen anwenden, welche zwischen dem sphärischen Dreiecke und dem zugehörigen geradlinigten obwalten; oder deutlicher, wir wollen die Winkel suchen, welche zwischen den Sehnen der Seiten des sphärischen Dreieckes enthalten sind. Diese beiden Dreiecke, das Sehnendreieck und das sphärische, haben also die Scheitelpunkte ihrer Winkel mit einander gemein, so daß jenes auf diesem gleichsam aufliegt. Um zur Kenntniß der merkwürdigen Beziehungen dieses Sehnendreieckes zum sphärischen Dreiecke zu gelangen, werden wir abermals die Principien der analytischen Geometrie in Anwendung bringen, und zuerst die Gleichungen der geraden Linien suchen, in deren Richtung die drei Seiten des in Rede stehenden Sehnendreieckes liegen.

Um erstlich zur Kenntniß der Gleichungen der drei Seiten des Sehnendreieckes zu gelangen, ist es nöthig, die rechtwinklichten Coordinaten der Eckpunkte A, B, C des sphärischen Dreieckes zu wissen.

Setzt man in der Absicht die Entfernungen der Punkte A, B, C, welche sich auf einer und derselben Kugeloberfläche befinden, von deren Mittelpunkt der Einheit gleich; so sind die Coordinaten:

des Punktes A	des Punktes B	des Punktes C
$\cos(1.\,x) = \frac{A_{,}}{V'}$	$\cos(2.\,x) = \frac{A_{,,}}{V''}$	$\cos(3.\,x) = \frac{A_{,,,}}{V'''}$
$\cos(1.\,y) = \frac{B_{,}}{V'}$	$\cos(2.\,y) = \frac{B_{,,}}{V''}$	$\cos(3.\,y) = \frac{B_{,,,}}{V'''}$
$\cos(1.\,z) = \frac{C_{,}}{V'}$	$\cos(2.\,z) = \frac{C_{,,}}{V''}$	$\cos(3.\,z) = \frac{C_{,,,}}{V'''}$

Nun sind bekanntlich die Gleichungen derjenigen Geraden, welche durch zwei Punkte gehen soll, deren Coordinaten $x'\ y'\ z'$ und $x''\ y''\ z''$ sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'}\right) . \; x + \left(\frac{x''. \, y' - x'. \, y''}{x'' - x'}\right); \\ z &= \left(\frac{z'' - z'}{x'' - x'}\right) . \; x + \left(\frac{x''. \, z' - x'. \, z''}{x'' - x'}\right); \end{aligned}\right\}$$

Wendet man daher diese allgemeinen Gleichungen auf jeden jener drei Fälle an; so erhält man unmittelbar die gesuchten Gleichungen derjenigen Geraden, welche durch je zwei der Scheitelpunkte des sphärischen Dreieckes gelegt werden. Wir wollen die Linien, welche durch die Punkte BC, AC, AB gelegt werden, respective mit s, $s_{,,}$ $s_{,,,}$ bezeichnen.

Für die Linie s, hat man nun:

$$x' = \frac{A_{,,}}{V''}; \quad y' = \frac{B_{,,}}{V''}; \quad z' = \frac{C_{,,}}{V''};$$

$$x'' = \frac{A_{,,,}}{V'''}; \quad y'' = \frac{B_{,,,}}{V'''}; \quad z'' = \frac{C_{,,,}}{V'''};$$

und die Gleichungen dieser Geraden s, werden seyn:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{B_{,,,}. V'' - B_{,,}. V'''}{A_{,,,}. V'' - A_{,,}. V'''}\right) . \; x - \frac{N . \, C'}{A_{,,,}. V'' - A_{,,}. V'''}; \\ z &= \left(\frac{C_{,,,}. V'' - C_{,,}. V'''}{A_{,,,}. V'' - A_{,,}. V'''}\right) . \; x + \frac{N . \, B'}{A_{,,,}. V'' - A_{,,}. V'''}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Eben so findet man für die Gleichungen der Geraden $s_{,,}$:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{B_{,}. V''' - B_{,,,}. V'}{A_{,}. V''' - A_{,,,}. V'}\right) . \; x - \frac{N . \, C''}{A_{,}. V''' - A_{,,,}. V'}; \\ z &= \left(\frac{C_{,}. V''' - C_{,,,}. V'}{A_{,}. V''' - A_{,,,}. V'}\right) . \; x + \frac{N . \, C''}{A_{,}. V''' - A_{,,,}. V'}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Endlich sind auf die nemliche Weise die Gleichungen der Linie $s_{,,,}$:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{B_{,,}. V' - B_{,}. V''}{A_{,,}. V' - A_{,}. V''}\right) . \; x - \frac{N . \, C'''}{A_{,,}. V' - A_{,}. V''}; \\ z &= \left(\frac{C_{,,}. V' - C_{,}. V''}{A_{,,}. V' - A_{,}. V''}\right) . \; x + \frac{N . \, B'''}{A_{,,}. V' - A_{,}. V''}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

29. Setzt man, um abzukürzen:

$$\left.\begin{aligned} A'. V' + A''. V'' + A'''. V''' &= [A]; \\ B'. V' + B''. V'' + B'''. V''' &= [B]; \\ C'. V' + C''. V'' + C'''. V''' &= [C]; \end{aligned}\right\}$$

so wird man als Gleichung der Ebene des Sehnendreieckes erhalten:

$$[A]\cdot x + [B]\cdot y + [C]\cdot z = N.$$

30. Nachdem wir nun im Besitze der Gleichungen der drei Geraden $s, s_{,,}, s_{,,,}$ und der Gleichung der Ebene des Sehnendreieckes sind, welche wir mit s bezeichnen wollen; so werden wir ohne Schwierigkeit mit Hilfe der allgemeinen Ausdrücke die Sinusse, Cosinusse und Tangenten aller Winkel, welche diese Gerade und diese Ebene sowohl unter einander, als auch mit den Linien 1, 2, 3 und mit den Ebenen *I, II, III* machen, finden können. Ueberhaupt sehen wir uns im Besitze aller derjenigen Hilfsmittel, um alle Linien, Flächen und Winkel an der drei- und gleichseitigen Pyramide, deren Scheitel der Mittelpunkt der Kugelfläche, und deren Basis das ebene Dreieck ***A B C*** ist, zu bestimmen und auszumessen, wobei man nicht zu vergessen hat, daß der Halbmesser der Kugelfläche zur Einheit angenommen wurde. Von den Ausdrücken, welche uns hier die analytische Geometrie liefert, werde ich nur die wichtigsten hieher setzen.

Da man bei der Entwicklung derselben auf einige Ausdrücke stößt, welche etwas zusammengesetzt scheinen, aber mit Hilfe der Lagrange'schen Relationen sehr einfache Reductionen zulassen; so will ich vorläufig davon eine Anzeige derselben mit ihren nöthigen Abkürzungen voranschicken.

31. In den Formeln, welche zur Bestimmung der Winkel dienen, so die Geraden $s, s_{,,}, s_{,,,}$ mit den coordinirten Achsen machen, stoßen wir auf folgende Ausdrücke:

$$\sqrt{\left\{(A_{,,,}V'' - A_{,,}V''')^2 + (B_{,,,}V'' - B_{,,}V''')^2 + (C_{,,,}V'' - C_{,,}V''')^2\right\}} = (V');$$

$$\sqrt{\left\{(A_{,}V''' - A_{,,,}V')^2 + (B_{,}V''' - B_{,,,}V')^2 + (C_{,}V''' - C_{,,,}V')^2\right\}} = (V'');$$

$$\sqrt{\left\{(A_{,,}V' - A_{,}V'')^2 + (B_{,,}V' - B_{,}V'')^2 + (C_{,,}V' - C_{,}V'')^2\right\}} = (V''');$$

Die gehörige Reduction dieser Ausdrücke gibt uns:

$$(V') = \sqrt{(2V''.V'''.\eta_{,})};\quad (V'') = \sqrt{(2V'.V'''.\eta_{,,})};\quad (V''') = \sqrt{(2V'.V''.\eta_{,,,})}.$$

In den Formeln, welche zur Bestimmung der Winkel der Ebene s mit den coordinirten Ebenen dienen, erscheint der Ausdruck:

$$\sqrt{\left\{[A]^2 + [B]^2 + [C]^2\right\}} = (V).$$

Die erste Entwicklung dieser Größe gibt:

$$(V) = \sqrt{\left\{(P'^2.V'^2 + P''^2.V''^2 + P'''^2.V'''^2) + 2.(V''.V'''.M' + V'V'''M'' + V'V''M''')\right\}}$$

Nun ist:

$$(P'^2 . V'^2 + P''^2 . V''^2 + P'''^2 . V'''^2) = \left\{ 3\, N^2 - 2\,(E'\, M' + E''\, M'' + E'''\, M''') \right\};$$

folglich hat man nach gehöriger Substitution:

$$(V) = \sqrt{\left\{ 3\, N^2 + 2.\ (M'.\ \eta_{,} + M''.\ \eta_{,,} + M'''.\ \eta_{,,,}) \right\}}.$$

In den Ausdrücken für die Winkel der Ebene *s* mit den Ebenen *I, II, III* wird man auf nachstehende Größen geleitet:

$$\left.\begin{aligned} A'.\ [A] + B'.\ [B] + C'.\ [C] &= (M');\\ A''.\ [A] + B''.\ [B] + C''.\ [C] &= (M'');\\ A'''.\ [A] + B'''.\ [B] + C'''.\ [C] &= (M''');\end{aligned}\right\}$$

Nach einigen einfachen Reductionen erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (M') &= (P'^2.\ V' + M'''.\ V'' + M''\ V''') = 2\, P'^2\, P''\, P'''.\ T.\ R';\\ (M'') &= (P''^2.\ V'' + M'.\ V''' + M'''\ V') = 2\, P'\, P''^2\, P'''.\ T.\ R'';\\ (M''') &= (P'''^2.\ V''' + M'.\ V'' + M''\ V') = 2\, P'\, P''\, P'''^2.\ T.\ R''';\end{aligned}\right\}$$

gemäß der Relationen [165].

In den Ausdrücken für die Winkel der Geraden $s_{,}$, $s_{,,}$, $s_{,,,}$ mit den respectiven Linien 1, 2, 3 kommen folgende Formen vor:

$$\left.\begin{aligned} \left\{A_{,}.\ (A_{,,,}.V'' - A_{,,}.V''') + B_{,}.\ (B_{,,,}.V'' - B_{,,}.V''') + C_{,}.\ (C_{,,,}.V'' - C_{,,}.V''')\right\} &= (E_{,});\\ \left\{A_{,,}.\ (A_{,}.V''' - A_{,,,}.V') + B_{,,}.\ (B_{,}.V''' - B_{,,,}.V') + C_{,,}.\ (C_{,}.V''' - C_{,,,}.V')\right\} &= (E_{,,});\\ \left\{A_{,,,}.\ (A_{,,}.V' - A_{,}.V'') + B_{,,,}.\ (B_{,,}.V' - B_{,}.V'') + C_{,,,}.\ (C_{,,}.V' - C_{,}.V'')\right\} &= (E_{,,,});\end{aligned}\right\}$$

Die Entwicklung dieser Ausdrücke gibt:

$$\left.\begin{aligned} (E_{,}) &= (E''\ V'' - E'''\ V''');\\ (E_{,,}) &= (E'''\ V''' - E'\ V');\\ (E_{,,,}) &= (E'\ V' - E''\ V'');\end{aligned}\right\}$$

In den Ausdrücken für die Winkel der Geraden 1, 2, 3 mit der Ebene *s* erscheinen nachstehende Größen:

$$\left.\begin{aligned} A_{,}.\ [A] + B_{,}.\ [B] + C_{,}.\ [C] &= N.\ V';\\ A_{,,}.\ [A] + B_{,,}.\ [B] + C_{,,}.\ [C] &= N.\ V'';\\ A_{,,,}.\ [A] + B_{,,,}.\ [B] + C_{,,,}.\ [C] &= N.\ V''';\end{aligned}\right\}$$

In den Ausdrücken für die Winkel der Linien $s_{,}$ $s_{,,}$ $s_{,,,}$ mit den Ebenen I, II, III erscheinen nachfolgende Größen:

$$A''.(A_{,,,}.V'' - A_{,,}.V''') + B''.(B_{,,,}.V'' - B_{,,}.V''') + C''.(C_{,,,}.V'' - C_{,,}.V''') = -N.V''';$$
$$A'''.(A_{,,,}.V'' - A_{,,}.V''') + B'''.(B_{,,,}.V'' - B_{,,}.V''') + C'''.(C_{,,,}.V'' - C_{,,}.V''') = +N.V'';$$
$$A'.(A_{,}.V''' - A_{,,,}.V') + B'.(B_{,}.V''' - B_{,,,}.V') + C'.(C_{,}.V''' - C_{,,,}.V') = +N.V''';$$
$$A'''.(A_{,}.V''' - A_{,,,}.V') + B'''.(B_{,}.V''' - B_{,,,}.V') + C'''.(C_{,}.V''' - C_{,,,}.V') = -N.V';$$
$$A'.(A_{,,}.V' - A_{,}.V'') + B'.(B_{,,}.V' - B_{,}.V'') + C'.(C_{,,}.V' - C_{,}.V'') = -N.V'';$$
$$A''.(A_{,,}.V' - A_{,}.V'') + B''.(B_{,,}.V' - B_{,}.V'') + C''.(C_{,,}.V' - C_{,}.V'') = +N.V';$$

Endlich kommen in den Ausdrücken für die Winkel, welche die Linien $s_{,}$ $s_{,,}$ $s_{,,,}$ unter einander machen, nachstehende Größen vor:

$$\left\{(A_{,}.V''' - A_{,,,}.V').(A_{,,}.V' - A_{,}.V'') + (B_{,}.V''' - B_{,,,}.V')(B_{,,}V' - B_{,}V'') \right. \\ \left. + (C_{,}.V''' - C_{,,,}.V').(C_{,,}V' - C_{,}V'')\right\} = (M_{,});$$

$$\left\{(A_{,,,}.V'' - A_{,,}.V''').(A_{,,}.V' - A_{,}.V'') + (B_{,,,}.V'' - B_{,,}.V''')(B_{,,}.V' - B_{,}V'') \right. \\ \left. + (C_{,,,}.V'' - C_{,,}.V''').(C_{,,}.V' - C_{,}.V''')\right\} = (M_{,,});$$

$$\left\{(A_{,,,}.V'' - A_{,,}.V''').(A_{,}.V''' - A_{,,,}.V') + (B_{,,,}.V'' - B_{,,}.V''')(B_{,}V''' - B_{,,,}V') \right. \\ \left. + (C_{,,,}.V'' - C_{,,}.V''').(C_{,}.V''' - C_{,,,}.V')\right\} = (M_{,,,}).$$

Entwickelt man diese Ausdrücke gehörig, so werden sie, nach einigen Reductionen geben:

$$\left.\begin{aligned} (M_{,}) &= V'.\left\{E'''V''' + E''V'' - E'V' - V'V''V'''\right\} = -\left(\frac{V'.\ R'.\ N^2}{T'}\right); \\ (M_{,,}) &= V''.\left\{E'V' + E'''V''' - E''V'' - V'V''V'''\right\} = -\left(\frac{V''.\ R''.\ N^2}{T''}\right); \\ (M_{,,,}) &= V'''.\left\{E'V' + E''V'' - E'''V''' - V'V''V'''\right\} = -\left(\frac{V'''.\ R'''.\ N^2}{T'''}\right); \end{aligned}\right\}$$

gemäß der Relationen [185].

32. Nachdem wir nun mit denjenigen Größen, welche in den Ausdrücken, so zur Bestimmung der in Rede stehenden Winkel dienen, als ihre Bestandtheile erscheinen, die nothwendigen Reductionen vorläufig unternommen haben; so können wir diese Ausdrücke selbst in sehr einfachen Formen geben.

Man erhält sonach folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(s_{,}\,.\,x) &= \frac{A_{,,,}.V'' - A_{,,}.V'''}{(V')}\;;\quad \cos(s_{,}\,.\,y) = \frac{B_{,,,}.V'' - B_{,,}.V'''}{(V')}\;;\quad \cos(s_{,}\,.\,z) = \frac{C_{,,,}.V'' - C_{,,}.V'''}{(V')}\;;\\
\cos(s_{,,}\,.\,x) &= \frac{A_{,}.V''' - A_{,,,}.V'}{(V'')}\;;\quad \cos(s_{,,}\,.\,y) = \frac{B_{,}.V''' - B_{,,,}.V'}{(V'')}\;;\quad \cos(s_{,,}\,.\,z) = \frac{C_{,}.V''' - C_{,,,}.V'}{(V'')}\;;\\
\cos(s_{,,,}\,.\,x) &= \frac{A_{,,}.V' - A_{,}.V''}{(V''')}\;;\quad \cos(s_{,,,}\,.\,y) = \frac{B_{,,}.V' - B_{,}.V''}{(V''')}\;;\quad \cos(s_{,,,}\,.\,z) = \frac{C_{,,}.V' - C_{,}.V''}{(V''')}\;;
\end{aligned}\right\}$$

$$\cos(s.\,yz) = \frac{[A]}{[V]}\;;\quad \cos(s.\,xz) = \frac{[B]}{(V)}\;;\quad \cos(s.\,xy) = \frac{[C]}{[V]}.$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(s.\,I) &= \frac{(M')}{P'.(V)}\;;\quad \cos(s.\,II) = \frac{(M'')}{P''.(V)}\;;\quad \cos(s.\,III) = \frac{(M''')}{P'''.(V)}\;;\\
\cos(s_{,}.\,1) &= \frac{(E_{,})}{V'.(V')}\;;\quad \cos(s_{,,}.\,2) = \frac{(E_{,,})}{V''.(V'')}\;;\quad \cos(s_{,,,}.\,3) = \frac{(E_{,,,})}{V'''.(V''')}\;;
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(s_{,}.\,2) &= -\frac{V''.\,\eta_{,}}{V'.(V')}\;;\quad \cos(s_{,}.\,3) = +\frac{V'''.\,\eta_{,}}{V'.(V')}\;;\\
\cos(s_{,,}.\,3) &= -\frac{V'''.\,\eta_{,,}}{V''.(V'')}\;;\quad \cos(s_{,,}.\,1) = +\frac{V'.\,\eta_{,,}}{V''.(V'')}\;;\\
\cos(s_{,,,}.\,1) &= -\frac{V'.\,\eta_{,,,}}{V'''.(V''')}\;;\quad \cos(s_{,,,}.\,2) = +\frac{V''.\,\eta_{,,,}}{V'''.(V''')}\;;
\end{aligned}\right\}$$

$$\sin(s.\,1) = \sin(s.\,2) = \sin(s.\,3) = \frac{N}{(V)}\;;$$

$$\cos(s.\,1) = \cos(s.\,2) = \cos(s.\,3) = \frac{\sqrt{2\,[N^2 + M'.\,\eta_{,} + M''.\,\eta_{,,} + M'''.\,\eta_{,,,}]}}{(V)}\;;$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(s_{,}.\,II) &= -\frac{N.V'''}{P'''.(V')}\;;\quad \sin(s_{,}.\,III) = +\frac{N.V''}{P'''.(V')}\;;\\
\sin(s_{,,}.\,III) &= -\frac{N.V'}{P'''.(V'')}\;;\quad \sin(s_{,,}.\,I) = +\frac{N.V'''}{P'.(V'')}\;;\\
\sin(s_{,,,}.\,I) &= -\frac{N.V''}{P.(V''')}\;;\quad \sin(s_{,,,}.\,II) = +\frac{N.V'}{P''.(V''')}\;;
\end{aligned}\right\}$$

Endlich hat man noch:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(s_{,,}.\,s_{,,,}) &= \frac{(M_{,})}{(V'').(V''')}\;;\\
\cos(s_{,}.\,s_{,,,}) &= \frac{(M_{,,})}{(V').(V''')}\;;\\
\cos(s_{,}.\,s_{,,}) &= \frac{(M_{,,,})}{(V').(V'')}\;;
\end{aligned}\right\}$$

Diese letzten drei Gleichungen geben noch:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\,(s_{,,}.\,s_{,,,}) &= -\frac{R'}{2P''P'''.T'.\sqrt{(V''V''')}}; \\
\cos\,(s_{,}.\,s_{,,}) &= -\frac{R''}{2P'P'''.T''.\sqrt{(V'V''')}}; \\
\cos\,(s_{,}.\,s_{,,}) &= -\frac{R'''}{2P'P''.T'''.\sqrt{(V'V'')}};
\end{aligned}\right\}$$

Diese hier angezeigten Ausdrücke liefern uns sehr merkwürdige Resultate, deren nähere Entwicklung aber außer den Grenzen dieser Abhandlung lieget, worin ich nur zu zeigen bemüht gewesen war, wie vortheilhaft die Anwendung derjenigen Relationen in der sphärischen Trigonometrie ist, welche ich hier unter der Benennung der Lagrange'schen Relationen aufgeführt habe.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Moth, Franz

Die Lagrange'schen Relationen und ihre Anwendung zur Ableitung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie

Prag 1829

4 Math.p. 239 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053696-5